

Ali Nesin

Temel Gerçel Analiz I

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



Nesin Yayıncılık A.Ş.
İnönü Mahallesi Çimen Sokak No: 50/A Elmadağ Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Temel Gerçel Analiz I

İlk basım Ekim 2011 (1000 adet)

Soyut Matematik 3
Analiz 1
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 12

004 01 02 001 - 156
ISBN 978-605-5794-80-4
Sertifika No: 18231

Editör
Ali Nesin

Grafik Danışmanı
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı
Aslı Can Korkmaz
Çiğdem Şahin

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
Çiftelhavuzlar Cad. Prestij İş Merkezi No: 27/806 Zeytinburnu/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

© 2009 Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
Tüm hakları saklıdır.
Kitabın tamamı ya da bir bölümü yayıncıdan yazılı izin alınmaksızın
hiçbir şekilde çoğaltılamaz, dağıtılamaz, depolanamaz.

İçindekiler

Önsöz	1
I Gerçel Sayılar	3
1 Gerçel Sayıların Aksiyomları	5
2 Gerçel Sayıların Temel Özellikleri	9
2.1 Toplamın Özellikleri	9
2.2 Çarpmanın Özellikleri	11
2.3 Sıralamanın Sonuçları	14
2.4 Mutlak Değer	16
2.5 Mesafe	18
2.6 SUP Aksiyomu	19
3 \mathbb{R} 'nin içindeki \mathbb{N} , \mathbb{Z} ve \mathbb{Q}	21
4 Kesirli Üsler ve Kökler	29
4.1 Kesirli Üs Alma ve Kök Bulma	29
4.2 Bazı Basit Sonuçlar	37
4.3 Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği (1)	41
4.4 Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği (2)	49
II Diziler	61
5 Yakınsak Gerçel Sayı Dizileri	63
5.1 Dizi	63
5.2 Yakınsak Diziler	65
5.3 Tanımın Tartışması	66
5.4 Limitin Biricikliği	68
5.5 Örnekler	70

6	Yakınsak Dizilerle Sıralama ve İşlemler	77
6.1	Yakınsak Diziler ve Sıralama	77
6.2	Yakınsak Dizilerle İşlemler	80
7	Yakınsak Dizi Örnekleri	91
8	Monoton Diziler	97
9	Sonsuza İraksayan Diziler	103
10	Cauchy Dizileri	109
11	Gerçel Sayıların Tamlığı	115
11.1	Altdiziler	115
11.2	Gerçel Sayıların Tamlığı	119
İki Konu		121
A.	Onluk Tabanda Açılım	121
B.	Gerçel Üs Almaya Doğru	125
Vize Sınavı		129
12	Büzüşen Diziler	135
13	Kapalı Kutular Teoremi	139
14	Bolzano-Weierstrass Teoremi	143
15	Euler Sabiti e ve \exp Fonksiyonu	149
15.1	Euler Sayısının Tanımı	149
15.2	$((1 + x/n)^n)_n$ Dizisi	151
15.3	e 'ye Yakınsayan Bir Başka Dizi	157
15.4	\exp Fonksiyonu	158
15.5	e 'ye Yakınsayan Bir Başka Dizi (devam)	162
15.6	$\exp x$ 'in Yaklaşık Değerini Bulmak	166
15.7	$\exp(x + y) = \exp x \exp y$	170
15.8	e Kesirli Bir Sayı Değildir	177
	Okuma Parçası: Bileşik Faizler	178
	Okuma Parçası: e Sayısının Değişik Gösterimleri	180
	Okuma Parçası: Yer Bulma Olasılığı	182
16	Birkaç Yakınsak Dizi Örneği	189
16.1	Standart Örnekler	189
16.2	İlk Bakışta Muamma Bir Dizi Örneği	192

17 Sonsuza Iraksayan Diziler ve Sonsuzlar	197
17.1 Sonsuza Iraksayan Diziler	197
17.2 Sonsuzları \mathbb{R} 'ye Eklemek	209
18 Dizilerin Alt ve Üstlimitleri	211
III Seriler	225
19 Seriler	227
19.1 Tanımlar	227
19.2 Serilerle İlgili İki Basit Gözlem	235
19.3 Serilerin Terimleriyle Oynamak	239
20 Pozitif Seriler ve Mutlak Yakınsaklık	251
21 Serilerle İşlemler ve Cauchy Çarpımı	259
21.1 Toplama, Çıkarma ve Bir Sayıyla Çarpma	259
21.2 Cauchy Çarpımı	261
21.3 Cesàro Ortalaması ve Toplamı	267
22 Dalgalanan Seriler	273
22.1 Leibniz Testi	273
22.2 Riemann Düzenleme Teoremi	276
23 d'Alembert ve Cauchy Kıstasları	279
23.1 d'Alembert Kıstasları	279
23.2 Cauchy Kıstası	286
23.3 Cauchy-d'Alembert Karşılaştırması	289
23.4 Yakınsaklık Yarıçapı	292
23.5 Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegralleri	296
24 Birkaç Önemli Yakınsaklık Kıstası	301
24.1 Riemann Serisi ve Kıstası	301
24.2 Raabe Kıstasları	307
24.3 Abel Yakınsaklık Kıstası	313
Karışık Alıştırmalar	317
Kaynakça	321
Dizin	323

Önsöz

En az dört ciltten oluşacak olan bu analiz serisi, 1995'ten beri İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde birinci sınıf matematik öğrencilerine verdiğim analiz derslerinden ve daha sonra Matematik Dünyası dergisine yazdığım yazılardan ortaya çıktı. Her cilt bir dönemlik ders oluşturacaktır.

Türev ve integral konuları öğrenciyi kaçınılmaz olarak otomatizme ve ezbere iteklediğinden, birkaç yıl sonra birinci sınıfta bu konulara hiç girmeme kararı aldım. Başlangıçta bu kısıtlama yüzünden işleyebileceğim konuların oldukça sınırlı olacağını düşünürken, zamanla bu tahminimde ne derece yanlış olduğumu anladım. Meğer türev ve integralsiz de analiz yapılabilirymiş ve bayağı derine inilebiliyormuş. Dolayısıyla ilk üç ciltte bu konulara girmeyeceğim.

Türev ve integralsiz analiz yapmak kimi zaman ayaklarından tavana asılı halde ve fırça ağızda resim yapmaya benzeyebiliyor, ama çekilen zorluğa değecek bir güzellik çıkıyor ortaya. (Biraz abarttım galiba!)

Burbakist bir yaklaşımla, kitaba gerçel sayılar sisteminin “aksiyonları”yla, yani tanımıyla başladım. Kanıtlanmamış hiçbir olgu kullanmadım.

Raabe Kıstasları bölümü gibi daha ileri seviyede olan bazı bölümler de ilk okuyuşta atlanabilir. Ama her matematik öğrencisinin bu ciltteki Cauchy çarpımını (Altbölüm 21) ve ikinci ciltteki Weierstrass M-testini okumasında, anlamasında ve özümsemesinde yarar vardır. Bu iki teorem hayatınızı kolaylaştıracak ve ayrıntılarla zaman kaybetmeyip kısa zamanda daha derine inmenize olanak sağlayacaktır.

Her ne kadar kitapta bir boyutlu (yani \mathbb{R} 'de) analiz yapılmışsa da, daha deneyimli okurun kanıtladığımız olguların birçoğunu, \mathbb{R}^n 'ye, \mathbb{C} 'ye, topolojik ve metrik uzaylara ve hatta daha genel olarak Banach uzaylarına ve cebirlerine genelleştirmesi işten bile değildir.

Konuları en ekonomik biçimde alaburbaki işlemedim ve bunu özellikle yapmadım. Analiz gibi hesap kitap isteyen ve üstelik böylesine temel bir konuda ekonomik olmanın pedagojik değerine inanmıyorum. Örneğin \exp fonksiyonuyla ilgili her şeyi, kitabın sonlarına doğru çok daha kısa bir biçimde sunabilirdim ya da eşitsizlikleri türev kullanarak çok daha kolay kanıtlayabilirdim. Tam tersine en ilkel yöntemlerle olabildiğince derin sonuçlar kanıtlamak istedim. Tabii sebat edip kitabı bitiren okur, yaptığımız karmaşık kanıtları ba-

sitleştirebilecektir. Ne mutlu ona!

Bir öğrenci iki tehlikeye maruz kalabilir. Ya çok fazla kuramsal matematiğe yönelip hesap yapmasını unuttur, ya da tam tersine, hesaba kitaba çok fazla önem verir ve kavramların derinliğine vakıf olamaz, kavramsal düşünemez. Gençliğinde ikinci tehlikeye maruz kalmış biri olarak öğrencilerimin böyle yetişmesini istemedim ve İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde gereken önlemleri aldım, ama bu sefer tam tersi oldu, bir fonksiyonun grafiğini çizemeyen ya da çizmekten imtina eden öğrenciler yetişti. İşte bu kitap öğrencileri her iki tehlikeye karşı korumak için yazılmıştır. Bir matematikçi gerektiğinde hesap yapabilmeli!

Bu kitabı okumak amacıyla eline alan ciddi matematik öğrencisi, teoremleri önce kendi kanıtlamaya çalışmalıdır, çözümlü örnekleri önce kendi çözmelidir. Sanılanın aksine zaman kaybı olmaz ve çok şey kazandırır. Bu önerim her matematik kitabı için geçerlidir. Düşünmekten kitap okuyamadığı zaman öğrenci araştırma yapmaya hazır demektir! Zaten bu yüzden birçok kez, daha sonra metinde kanıtlanacak olan teoremleri alıştırma olarak koydum.

Kitabın bir iki yerinde pek pedagojik değeri olduğuna inanmadığım hesaplamalar yaptığının farkındayım. Engelleyemedim. Daha doğru yaklaşımlara açtım. Lütfen kitapta bulduğunuz fazlalıkları, eksiklikleri, yanlışları, anlatım bozukluklarını anesin@nesinvakfi.org adresine bildirin.

Kanıtlayamadığım eşitsizliklerde imdadıma hızır gibi yetişen Görkem Özkaya'ya, bu ders notlarımı yazmam için bana gereken ortamı sağlayan ve desteği veren eşim Özlem Beyarslan'a ve asistanlarım Ash Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Herkese kolay gele.

Ali Nesin / NMK, 10 Ekim 2010 - 18 Eylül 2011

1. Gerçel Sayıların Aksiyomları

[N2]'de, kümeler kuramının en basit aksiyomlarından yola çıkarak, gerçel sayılar kümesi \mathbb{R} 'yi matematiksel olarak yaratmıştık. Ayrıca, adına 0 (sıfır) ve 1 (bir) dediğimiz iki gerçel sayıya özel önem vermiş ve \mathbb{R} kümesi üzerine, + (toplama) ve \times (çarpma) diye adlandırdığımız iki işlemle birlikte bir de $<$ olarak simgelediğimiz bir tamsıralama tanımlamıştık. Yine aynı kitapta,

$$(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$$

yapısının birtakım özelliklerini kanıtlamıştık. [N2]'de kanıtlanmış özelliklerin 16'sını birazdan sıralayacağız. Bu kitapta, gerçel sayılar yapısının [N2]'de nasıl inşa edildiğini unutarak, sadece bu 16 özellikten hareketle, yani sadece ve sadece bu özellikleri doğru varsayarak, matematiksel analizi geliştireceğiz; çünkü bu kitapta analiz yapılacak ve analizde gerçel sayıların nasıl yaratıldıklarından ziyade ne oldukları önemli.

[N2]'de kanıtlanmış bu 16 önermeyi bu kitapta aksiyom olarak kabul etmenin hiçbir sakıncası yoktur. Gerçekten de bu 16 önerme, çocukluğumuzdan beri sezgilerimizle hissettiğimiz gerçel sayıların özünü oluşturur. Bu önermelerden hareketle, gerçel sayıların sezgilerimize göre doğru olması gereken tüm özellikleri kanıtlanabilir.

Yani bu kitapta, [N2]'de gerçek anlamda ve çok somut olarak inşa edilmiş olan \mathbb{R} kümesinin, 0 ve 1 elemanlarının ve toplama ve çarpma işlemlerinin ve $<$ sıralamasının nasıl tanımlandıklarını unutup, gerçel sayıları, aşağıdaki 16 özelliği sağlayan matematiksel bir yapı olarak kabul edebilirsiniz.

\mathbb{R} 'nin Aksiyomları

T1. Her a, b, c için, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

T2. Her a için, $a + 0 = 0 + a = a$.

T3. Her a için, $a + b = b + a = 0$ eşitliklerini sağlayan bir b vardır.

T4. Her a, b için, $a + b = b + a$.

Ç1. Her a, b, c için, $(ab)c = a(bc)$.

Ç2. Her a için, $a \times 1 = 1 \times a = a$ eşitliği sağlanır.

Ç3. Her $0 \neq a$ için, $ab = ba = 1$ eşitliklerini sağlayan bir b vardır. ($ab, a \times b$ demektir.)

Ç4. Her a, b için, $ab = ba$.

SB. $0 \neq 1$.

D. Her a, b, c için, $a(b + c) = ab + ac$.

O1. Hiçbir a için $a < a$ olamaz.

O2. Her a, b, c için, $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$.

O3. Her a, b için, ya $a < b$ ya $a = b$ ya da $b < a$.

TO. Her a, b, c için, $a < b$ ise $a + c < b + c$.

ÇO. Her a, b, c için, $a < b$ ve $0 < c$ ise $ac < bc$.

SUP. Boş olmayan üstten sınırlı her altkümünün bir en küçük üstsını vardır.

Bundan böyle bu önermelere aksiyom adı vereceğiz. Bunlar matematiğin değil, analizin aksiyomları olarak kabul edilmelidirler. Daha doğru bir ifadeyle, aksiyom bu 16 önermenin doğru olduğu bir

$$(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$$

yapısı olduğunu söylüyor.

Yukardaki önermelerin bir anlam kazanması için şunları da eklemek lazım:

1. \mathbb{R} bir kümedir.

2. 0 ve 1 , \mathbb{R} 'nin birer elemanıdır. 0 'a "sıfır", 1 'e "bir" denir.

3. $+$ ve \times , $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımından \mathbb{R} 'ye giden iki fonksiyondur. Ama aksiyomları yazarken, " $+(a, b)$ " yerine çok daha alışık olduğumuz " $a + b$ " yazılımını kullandık. " $a + b$ " yazılımını " a artı b " diye okuyacağız. Benzer şekilde $\times(a, b)$ yerine ab yazdık; bunu da " a çarpı b " diye okuyacağız. Gerekli gördüğümüzde " $a \times b$ " ya da " $a \cdot b$ " yazılımlarına da başvuracağız.

4. $<$, \mathbb{R} 'nin ikili bir ilişkisidir, yani $<$ aslında $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir. " $(a, b) \in <$ " yerine, daha alışık olduğumuz " $a < b$ " yazılımını tercih ettik. " $a < b$ " ifadesi " a, b 'den küçüktür" diye okunur.

Dikkat ederseniz, toplama ve çarpma üzerine yukarıdaki aksiyomlar dışında hiçbir şey bilmiyormuşuz gibi davranıyoruz. Örneğin 2 diye bir eleman henüz tanımlamadık. Bu elemanı daha sonra $1 + 1$ olarak tanımlayacağız. Soyut matematik işte böyle bir şeydir. Gelecek bölümlerde gerçel sayılar üzerine bildiğimiz ya da bildiğimizi sandığımız her şeyi kanıtlayacağız.

Aksiyomların sonuncusu hariç her biri \mathbb{R} 'nin elemanlarından bahsetmektedir, yani ilk 15 aksiyomda söz edilen a, b ve c , \mathbb{R} 'nin birer elemanıdır. Sonuncu aksiyomda (SUP) ise \mathbb{R} kümesinin (üstten sınırlı olan ama boşküme olmayan) altkümelerinden söz edilmektedir.

SUP aksiyomu dışındaki tüm aksiyomların kesirli sayılar kümesi \mathbb{Q} için de geçerli olduklarına dikkatinizi çekeriz. Kesirli sayılarla gerçel sayıların arasın-

daki ayrımın, elemanlardan değil de altkümelerden sözeden SUP aksiyomunda saklı olduğunu görmek gerekir.

Bazı Notlar. Yukarıda sıralanan aksiyomları sağlayan iki

$$(R, +, \times, <, 0_R, 1_R) \text{ ve } (S, +, \times, <, 0_S, 1_S)$$

yapısı birbirine öylesine benzer ki, elemanlarının adları değişik olmasa aralarındaki farkı anlamamanın olanağı yoktur. Matematiksel deyişle, R ile S arasında, toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya duyarlı, yani her $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(xy) &= f(x)f(y), \\ x < y &\Leftrightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

önergelerini sağlayan bir

$$f : R \rightarrow S$$

eşlemesi vardır [N2]. Günlük ifadeyle bu şu demektir: Toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya dokunmadan R 'nin x elemanını atıp yerine $f(x)$ koyarsak aynen S yapısını elde ederiz, yani R ile S yapıları arasında, kümelerin elemanları dışında - ki bunun da matematiksel ve düşünsel açıdan en küçük bir önemi yoktur - en küçük bir ayrım yoktur. Bu durumda,

$$(R, +, \times, <, 0_R, 1_R) \simeq (S, +, \times, <, 0_S, 1_S)$$

yazarız.

Bunu, gerçekten (yani özünde, yani esaslı bir biçimde) birbirinden değişik iki gerçel sayı sistemi yoktur diye ifade edebiliriz. Bu biricikliği SUP aksiyomuna borçluyuz. SUP aksiyomunu sağlamayan

$$(\mathbb{Q}, +, \times, <, 0, 1) \text{ ya da } (\mathbb{Z}, +, \times, <, 0, 1)$$

yapıları için böyle bir biriciklik doğru olmadığı gibi, doğru olması sözkonusu bile olamaz!

Öte yandan sonuncu SUP aksiyomunun diğer aksiyomlar kadar “doğal” olmadığına dikkatinizi çekerim. Bir sonraki gözlem biraz da bu dediğimizle ilgili.

Matematiksel anlamda inşa ettiğimiz gerçel sayılar kümesinin gerçek dünyayla (her ne demekse!) ya da liselerde öğretilen sayı doğrusuyla ilgisinin pek açık olmadığıdır. Gerçel sayıları bu kitapta fiziksel anlamda mesafe olarak tanımlamadık, tanımlayamadık da, çünkü matematik yapıyoruz ve matematik sadece ve sadece zihinsel bir uğraştır. Gerçel sayılar sistemi, matematiksel olarak, yukarıda sıraladığımız özellikleri sağlayan bir yapıdır. Böyle bir yapının varlığı [N2]'de kanıtlanmıştı. Bu kitapta matematiksel mantık dışında sadece bu özellikleri veri olarak kabul edeceğiz ve analizi geliştireceğiz.

2. Gerçel Sayıların Temel Özellikleri

Bu satırdan itibaren, bütün kitap boyunca *gerçel sayılar sistemi*, bir önceki bölümdeki 16 önermeyi sağlayan bir $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ yapısıdır. Bu önermelere \mathbb{R} 'nin aksiyomları diyeceğiz. Tabii bunlar aslında aksiyom değildirler, $[\mathbb{N}2]$ 'de kanıtlanmışlardır, ama bu kitapta bu önermelere aksiyom muamelesi yapacağız.

\mathbb{R} 'nin elemanlarına *gerçel sayı* diyeceğiz.

Bu arada, $[\mathbb{N}2]$ 'de yaptıklarımızı yok saydığımızdan \mathbb{R} 'nin içinde kesirli sayılar kümesi \mathbb{Q} 'nün ya da en azından bir kopyasının bulunduğunu henüz bilmediğimizi de dikkatinizi çekerim. Gelecek bölümde \mathbb{R} 'nin içindeki \mathbb{Q} 'yü bulacağız.

Bu bölümde gerçel sayı sisteminin en basit özelliklerini kanıtlayacağız. Kanıtlarda SUP aksiyomunu sadece en sonda kullanacağız. SUP dışındaki aksiyomların sağlandığı yapılara *sıralı cisim* denir. Demek ki hemen aşağıda kanıtlayacağımız önermeler sadece \mathbb{R} 'de değil, tüm sıralı cisimlerde doğrudur.

2.1 Toplamanın Özellikleri

(A) T1 ve T4'ün anlamı. T1, toplama yaparken paranteze gerek olmadığını söylüyor. Örneğin,

$$(a + b) + c \text{ ve } a + (b + c)$$

yerine $a + b + c$ yazabiliriz. Aynı biçimde,

$$(a + b) + (c + d) \text{ ve } (a + (b + c)) + d$$

yerine $a + b + c + d$ yazabiliriz. T4 de toplama yaparken sıralamanın önemli olmadığını söylüyor. Örneğin, $a + b + c + d$ yerine $b + d + c + a$ yazabiliriz. T1'e *birleşme özelliği*, T4'e de *değişme özelliği* adı verilir.

(B) 0'ın biricikliği. T2 özelliğini sağlayan 0 elemanının biricik olduğunu kanıtlayalım: $0'$ elemanı da aynen 0 gibi T2 özelliğini sağlasın, hatta bu özel-

liğin sadece yarısını sağlasın, diyelim her $a \in \mathbb{R}$ için, $a + 0' = a$ olsun, özel bir durum olarak, $a = 0$ için $0 + 0' = 0$ elde ederiz; o zaman,

$$(1) \quad 0' \stackrel{T2}{=} 0 + 0' = 0$$

olur.

(C) Toplamsal Ters. Şimdi, verilmiş bir $a \in \mathbb{R}$ için T3 özelliğini, hatta T3'ün sadece yarısını sağlayan b 'nin biricikliğini kanıtlayabiliriz:

$$a + b = b + a = 0 \text{ ve } a + c = 0$$

olsun; o zaman,

$$b \stackrel{T2}{=} b + 0 = b + (a + c) \stackrel{T1}{=} (b + a) + c = 0 + c \stackrel{T2}{=} c.$$

Demek ki $b = c$ ve b biricik. Benzer şekilde $c + a = 0$ ise de $c = b$ eşitliği kanıtlanabilir. Tabii a değıştikçe T3 eşitliğini sağlayan b de değışir, ama verilmiş bir a için T3 özelliğini sağlayan b biriciktir, bir ikincisi daha yoktur. O zaman b 'ye özel bir ad verebiliriz: b 'ye a 'nın **toplamsal tersi** denir ve b yerine $-a$ yazılır ve “eksi a ” diye okunur. Elbette,

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

eşitliği sağlanır ve $-a$ bu eşitliklerin birini sağlayan yegâne elemandır, yani,

$$b = -a \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b + a = 0.$$

$0 + 0 = 0$ olduğundan, $-0 = 0$ olur.

(D) Çıkarma. $a + (-b)$ yerine $a - b$ yazılır ve bu işleme **çıkarma** denir.

$$-a - b$$

ifadesi $(-a) - b$ anlamına gelir:

$$-a - b = (-a) - b = (-a) + (-b).$$

$-a + b$ ifadesi de $(-a) + b$ anlamına gelir. Tahmin edilen

$$-(a + b) = -a - b \text{ ve } -(a - b) = b - a$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak zor değildir. Birincisini kanıtlayalım misal olarak:

$$\begin{aligned} (a + b) + (-a - b) &= a + b + (-a) + (-b) \\ &= (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

21. Serilerle İşlemler ve Cauchy Çarpımı

Serilerle toplama ve çıkarma yapabiliriz. Çarpma da yapılır ama çarpma işleminin tanımlanması toplama ve çıkarma kadar kolay değildir. Önce toplama ve çıkarmayla başlayalım, ardından çarpmaya el atacağız. Bu arada, biraz daha zor olan çarpma bölümünün hayatı çok kolaylaştırdığını, geçmişte kanıtladığımız

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$$

gibi eşitlikleri kanıtladığı gibi birçok trigonometrik eşitliği de bir çırpıda kanıtladığımı söyleyelim. Yani Cauchy çarpımı bölümü ciddiyle ve dikkatle okunmalıdır.

21.1 Toplama, Çıkarma ve Bir Sayıyla Çarpma

Kolay olan işlemle başlayalım: Toplama.

Teorem 21.1. *Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, o zaman,*

$$\sum (x_i + y_i)$$

serisi de yakınsaktır ve

$$\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Kanıt çok kolay:

$$\begin{aligned} \sum (x_i + y_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (x_i + y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n x_i + \sum_{i=0}^n y_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n y_i = \sum x_i + \sum y_i. \end{aligned}$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Aynı teorem $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri $\pm\infty$ 'a iraksadıklarında da doğrudur, yeterki biri ∞ diğeri $-\infty$ olmasın:

Teorem 21.2. *Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri $\overline{\mathbb{R}}$ 'de değer alıyorsa ve $\overline{\mathbb{R}}$ 'de $\sum x_i + \sum y_i$ toplamı tanımlıysa, o zaman, $\sum(x_i + y_i)$ serisi de $\overline{\mathbb{R}}$ 'de değer alır ve*

$$\sum(x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Teorem 21.3. *Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa ve $r \in \mathbb{R}$ ise, o zaman,*

$$\sum r x_i$$

serisi de yakınsaktır ve

$$\sum r x_i = r \sum x_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Bunun da kanıtı çok kolay:

$$\sum r x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n r x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(r \sum_{i=0}^n x_i \right) = r \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i = r \sum x_i.$$

□

Aynı sonuç $\sum x_i$ serisi $\pm\infty$ 'a iraksadığında da doğrudur:

Teorem 21.4. *Eğer $\sum x_i$ serisi $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde değer alıyorsa ve $r \in \mathbb{R}$ ise, o zaman, $\sum r x_i$ serisi de $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde değer alır ve*

$$\sum r x_i = r \sum x_i$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 21.5. *Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin $\overline{\mathbb{R}}$ 'de değer alıyorsa ve $\overline{\mathbb{R}}$ 'de*

$$\sum x_i - \sum y_i$$

toplamı tanımlıysa, o zaman,

$$\sum(x_i - y_i)$$

serisi de $\overline{\mathbb{R}}$ 'de değer alır ve

$$\sum (x_i - y_i) = \sum x_i - \sum y_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Teorem 21.2 ve Teorem 32.4'ten çıkar. □

21.2 Cauchy Çarpımı

Çarpmayı tanımlamak biraz daha zordur. İlk akla gelen

$$\left(\sum x_i \right) \left(\sum y_i \right) = \sum x_i y_i$$

tanımında iş yoktur, hem de hiç iş yoktur, hiçbir işe yaramaz. Çarpmanın tanımı için biraz daha düşünmeliyiz. $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin n -inci kısmi toplamlarını çarpalım:

$$(x_0)(y_0) = x_0 y_0$$

$$(x_0 + x_1)(y_0 + y_1) = x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) + x_1 y_1$$

$$(x_0 + x_1 + x_2)(y_0 + y_1 + y_2) = x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0) \\ + (x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_2 y_2$$

$$(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) \\ + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0) + (x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0) \\ + (x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) + (x_2 y_3 + x_3 y_2) + x_3 y_3$$

Yukarda, çarpımdaki $x_i y_j$ terimlerini $i + j$ 'nin değerlerine göre gruplayalım. Bir anlamda x_i, y_j ve $x_i y_j$ terimlerine sanki sırasıyla i, j ve $i + j$ 'inci "dereceden" terimlermiş gibi davranalım

$i + j$ değerinin 0 olduğu grup, tüm kısmi çarpımlarda hep aynı kalıyor: $x_0 y_0$.

$i + j$ 'nin 1 olduğu grup ikinci satırda beliriyor ve o satırdan sonra hiç değişikliğe uğramıyor: $x_0 y_1 + x_1 y_0$.

Öte yandan $i + j$ değerinin 2 ya da daha büyük olduğu gruplar bir süre değişiyorlar, ama bir zaman sonra da sabitleniyorlar. Örneğin $i + j$ 'nin 2 olduğu grup, üçüncü adımda sabitleniyor: $x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0$. Ve $i + j$ 'nin 3 olduğu grup $(x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0)$, dördüncü adımda sabitleniyor.

Genel olarak $i + j$ 'nin k olduğu grup, $k + 1$ 'inci adımda sabitlenecek, daha önce değil.

Anlaşılaçağı üzere, $\sum x_i$ serisinin n -inci kısmi toplamıyla $\sum y_i$ serisinin m -inci kısmi toplamını çarpıp, çarpımı yukardaki gibi $i + j$ değerine göre gruplarsak,

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \left(\sum_{j=0}^m y_j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k, i \leq n, j \leq m} x_i y_i \right)$$

eşitliğini elde ederiz. Sağ tarafta toplanan

$$\sum_{i+j=k, i \leq n, j \leq m} x_i y_j$$

terimleri n ve m 'ye göre değişir. Ama $n \geq k$ ve $m \geq k$ ise bu terim artık değişmez, yani n ve m 'yi k 'dan büyükeşit alırsak değişmez. Ayrıca $i+j = k \leq n$ ise, zorunlu olarak $i \leq n$ olur. O halde, $k = n = m$ alarak, şu tanıımı yapmak için yeterli nedenimiz var:

$$z_k = \sum_{i+j=k, i \leq k, j \leq k} x_i y_j = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^k x_i y_{k-i}.$$

İşte, iki serinin Cauchy çarpımını bu z_k 'lerin toplamı olarak tanımlayacağız:

$$\left(\sum x_i \right) \left(\sum y_i \right) = \sum_k z_k = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} x_i y_j \right).$$

Tanımin böyle yapılmasının nedeni aşağıdaki teoremden gizli:

Teorem 21.6 (Cauchy). $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri mutlak yakınsaksa ve z_k yukardaki gibi tanımlanmışsa, o zaman $\sum z_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve

$$\sum z_i = \left(\sum x_i \right) \left(\sum y_i \right)$$

olur.

Kanıt: Bu teoremin kanıtı, yukardaki teoremlerin kanıtından çok daha fazla dikkat ve yoğunlaşma gerektirir. Ama kanıtı muhteşem güzelliğindedir.

$x_i y_j$ sayılarını bir tablo halinde yazalım:

	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_i	\cdots	x_n
y_0	$x_0 y_0$	$x_1 y_0$	$x_2 y_0$	\cdots	$x_i y_0$	\cdots	$x_n y_0$
y_1	$x_0 y_1$	$x_1 y_1$	$x_2 y_1$	\cdots	$x_i y_1$	\cdots	$x_n y_1$
y_2	$x_0 y_2$	$x_1 y_2$	$x_2 y_2$	\cdots	$x_i y_2$	\cdots	$x_n y_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
y_j	$x_0 y_j$	$x_1 y_j$	$x_2 y_j$	\cdots	$x_i y_j$	\cdots	$x_n y_j$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
y_n	$x_0 y_n$	$x_1 y_n$	$x_2 y_n$	\cdots	$x_i y_n$	\cdots	$x_n y_n$

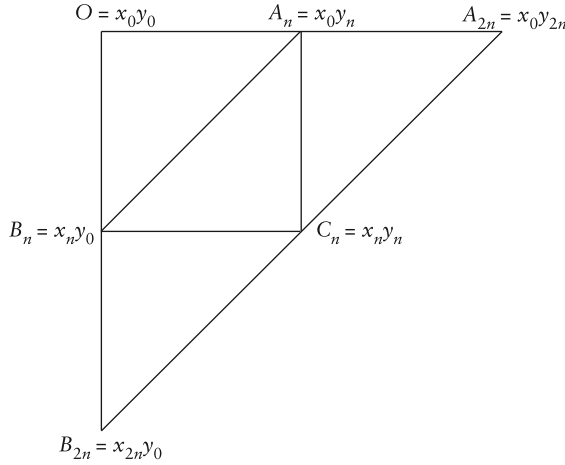
Ve

$$X_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n,$$

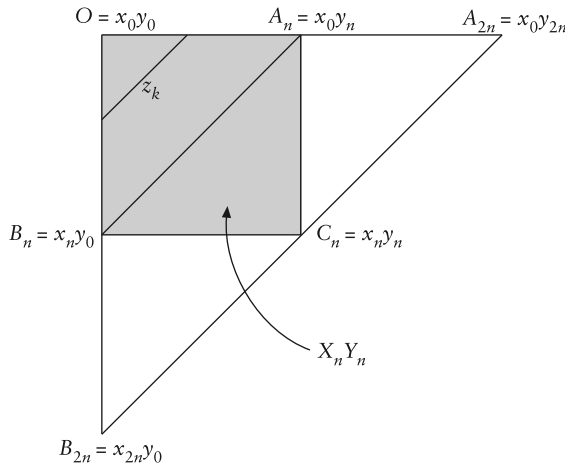
$$Y_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n,$$

$$Z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n,$$

olsun. Şimdi $X_n Y_n$ çarpımını ve Z_n toplamını bir tablo üstünde temsil etmeye çalışalım.



Her z_k , yukardaki şekildeki k -inci çaprazın üstündeki sayıların toplamıdır (ve aşağıdaki şekilde gösterilmişlerdir). Örneğin, z_n , $A_n B_n$ çaprazının üstündeki sayıların toplamıdır. Demek ki Z_n ve Z_{2n} sayıları, sırasıyla $O A_n B_n$ ve $O A_{2n} B_{2n}$ üçgenlerinin içinde bulunan sayıların toplamıdır. Ayrıca, $X_n Y_n$ sayısı, $O A_n C_n B_n$ dörtgeninin içindeki sayıların toplamıdır.



22. Dalgalanan Seriler

22.1 Leibniz Testi

Önceki bölümlerde daha çok terimleri pozitif sayılar olan serilere bakmıştık. Bu bölümde terimleri bir pozitif bir negatif olan serilere bakacağız. Bakacağımız seriler, $a_n \geq 0$ gerçel sayıları için,

$$\sum (-1)^n a_n$$

biçiminde yazılan serilerdir. Bu tür serilere *dalgalanan* ya da *alterne seriler* denir. Perihan Mağden'in tabiriyle içlerinden en ennnnn bilineni,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

serisidir. Bu seri yakınsaktır. (Ve limiti $\ln 2$ 'dir, yani 2'nin doğal logaritmasıdır. Ama henüz logaritma mogaritma görmediğimizden bu $\ln 2$ sayısı okura şimdilik bir şey ifade etmeyebilir.)

Yukarda ele alınan $\sum (-1)^n a_n$ türünden bir serinin yakınsak olması için, Teorem 19.4'de gördüğümüz üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

olmalıdır. Ancak bu koşul yetmez, daha fazlasına gerek var.

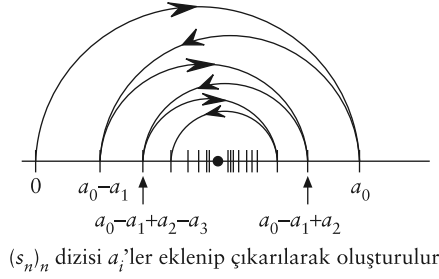
Teorem 22.1 (Leibniz). $(a_n)_n$ artmayarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. O zaman, $\sum (-1)^n a_n$ serisi yakınsaktır.

Kanıt: $s_n = a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n$, kısmi toplamlar olsun.

$$(s_{2n})_n \text{ ve } (s_{2n+1})_n$$

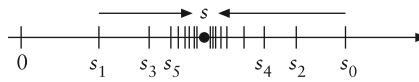
dizilerine bakacağız.

Birincisinin azalan, ikincisinin artan olduğunu ve her ikisinin de aynı limite yakınsadığını kanıtlayacağız. Elde ettiğimiz bilgiler aşağıdaki şekli verecek.



Sav 1. (s_{2n})_n azalan bir dizidir.

Kanıt: s_{2n} ≥ s_{2n+2} eşitsizliğini göstermeliyiz. Ama s_{2n+2}'nin içindeki s_{2n}'yi ortaya çıkarırsak, (a_n)_n dizisinin azalan olmasını



(s_{2n+1})_n dizisi artarak, (s_{2n})_n dizisi azalarak aynı sayıya yakınsayacaklar.

kullanarak bunu kolaylıkla görebiliriz:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} \\ &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n}. \end{aligned}$$

Sav 2. (s_{2n+1})_n artan bir dizidir.

Kanıt: s_{2n+1} ≤ s_{2n+3} eşitsizliğini göstermeliyiz. Kanıt aynen yukardaki gibi:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+3}a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1}. \end{aligned}$$

Sav 3. s_{2n} ≥ s_{2n+1}.

Kanıt: Çok kolay: s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} ≥ 0.

Sav 4. Her n ve m için, s_{2n+1} ≤ s_{2m}.

Kanıt: n ≤ m varsayımını yapalım. O zaman yukardaki üç savdan,

$$s_{2n+1} \leq s_{2m+1} \leq s_{2m} \leq s_{2n}.$$

çıkar. n ≥ m varsayımında kanıt benzerdir.

Şimdi teoremin kanıtını bitirebiliriz. Sav 2 ve 4'e göre, (s_{2n+1})_n artan ve üstten sınırlı bir dizidir; demek ki bir limiti vardır. Bu limite u adını verirsek, Sav 4'e göre, her m için,

$$u \leq s_{2m}$$

olur. Sav 1'e ve bu eşitsizliğe göre, $(s_{2m})_m$ azalan ve alttan sınırlı bir dizidir; demek ki bir limiti vardır. Bu limite v adını verirse, yukardaki eşitsizlikten dolayı

$$u \leq v$$

olur. Şimdi Sav 3'ü kullanalım:

$$v - u = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0.$$

Demek ki $u = v$ ve $(s_{2n+1})_n$ ve $(s_{2n})_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlar. Dolayısıyla $(s_n)_n$ dizisi de aynı sayıya yakınsar. Teorem kanıtlanmıştır. \square

Yukardaki kanıttan, her n ve m için,

$$s_{2n+1} \leq \sum (-1)^i a_i \leq s_{2m}$$

bulunur. Demek ki ayrıca,

$$0 \leq s_{2n} - \sum (-1)^i a_i \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$$

ve

$$0 \leq \sum (-1)^i a_i - s_{2n-1} \leq s_{2n-2} - s_{2n-1} = a_{2n-1}$$

olur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum (-1)^i a_i - s_n \right| \leq a_n$$

olur. Bunu da not edelim.

Sonuç 22.2 (Kanıtın Sonucu). $(a_n)_n$ azalan ve 0'a yakınsayan pozitif bir diziyse,

$$\sum (-1)^i a_i$$

serisi yakınsaktır ve

$$\left| \sum (-1)^i a_i - \sum (-1)^i a_i \right| \leq a_n$$

olur.

Böylece,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

toplamına, yani henüz bilmediğimiz $\ln 2$ sayısına dilediğimiz kadar ($1/n$ kadar) yakınsayabiliriz. Bu seriyi şöyle yazalım:

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$$

ve kısmi toplamları (mesela Excel kullanarak) hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= 1 \\
 s_1 &= 0,5 \\
 s_2 &= 0,83333\dots \\
 s_5 &= 0,73333\dots \\
 s_9 &\approx 0,645634\dots \\
 s_{10} &\approx 0,736544\dots \\
 s_{11} &\approx 0,653210\dots \\
 s_{99} &\approx 0,688172\dots \\
 s_{100} &\approx 0,698073\dots \\
 s_{999} &\approx 0,692647\dots \\
 s_{1000} &\approx 0,693646\dots
 \end{aligned}$$

Örneğin,

$$0 \leq \sum \frac{(-1)^i}{i+1} - 0,692647 \leq \frac{1}{1000}$$

bulunur. Nitekim,

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1} = 0,69314718055994\dots$$

olur.

Alıştırılmalar.

22.1. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadığını belirleyin.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt[3]{i}}, & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i^2}, & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i^i}, \\
 &\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i^3}{i^3+1}, & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i^3}{i^4-i^2+1}, & \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i 2^{1/i}, \\
 &\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(e-2)^{i/2}}, & \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i^2+i-1} \frac{\sqrt{i}}{i+5}, & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{1+i^2}, & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{i+1}.
 \end{aligned}$$

22.2 Riemann Düzenleme Teoremi

Pozitif bir serinin terimlerinin yerlerini değiştirirsek yakınsaklığın bozulmama ve limitin değişmeyeceğini gördük (bkz. Teorem 19.10). Yakınsak olan ama mutlak yakınsak olmayan seriler (bu tür serilere *koşullu yakınsak seri* denir) bu konuda dramatik bir fark gösterirler: Böyle bir serinin terimlerinin yerlerini değiştirirsek seriyi dilediğimiz sayıya yakınsattırabiliriz, hatta dilersek $\pm\infty$ 'a bile ıraksattırabiliriz!

Teorem 22.3 (Riemann Düzenleme Teoremi). $\sum a_i$ koşullu yakınsak olan bir seri olsun. $b \in \mathbb{R}$, rastgele olsun. O zaman doğal sayılar kümesi \mathbb{N} 'nin

$$\sum_i a_{\sigma(i)} = b$$

eşitliğini sağlayan bir σ eşleşmesi vardır.

Kaynakça

- [Ab] Stephen Abbott, **Understanding Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 2002.
- [Ap] Tom M. Apostol, **Calculus I ve II**, John Wiley and Sons 1967.
- [Be] Sterling K. Berberian, **A First Course in Real Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1994.
- [BR] G. Bouligand ve J. Rivaud, **L'Enseignement des Mathématiques Générales par les Problèmes**, Librairie Vuibert, 4'üncü basım, 1968.
- [Br] Andrew Browder, **Mathematical Analysis, an Introduction**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1996.
- [G] Roger Godement, **Analysis I ve II**, Sringer, Universitext 2003. (Fransızcadan çeviren Philip Späin).
- [Kn] Konrad Knopp, **Infinite Sequences and Series**, (çeviren F. Bagemihl), Dover Publications 1956.
- [Ko] P.P. Korowkin, **Eşitsizlikler**, çeviri H. Şahinci, TMD 1962, 60 sayfa.
- [L] Serge Lang, **A First Course in Calculus**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, 5. Basım, 1986.
- [MD] Matematik Dünyası dergisi, TMD, 2007-2010..
- [N1] Nesin, Ali, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3'üncü basım, Nesin Yayıncılık 2011.
- [N2] Nesin, Ali, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: <http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2>.
- [N3] Nesin, Ali, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: <http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2>.
- [SCY] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom, **The USSR Olympiad Problem Book**, Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics, Dover Publications, Inc. 1994.
- [Sp] Murray R. Spiegel, **Théorie et Applications de l'Analyse**, Serie Schaum, McGraw-Hill 1974.

Dizin

- +, 6
- >, 14
- ×, 6
- $a^{1/n}$, 34
- <, 5
- ≤, 14
- ≥, 14
- ∞, 70, 209
- $\sqrt[2]{a}$, 34
- $\sqrt[3]{a}$, 34
- \sqrt{a} , 34
- 1/a, 12

- 0, 5, 6, 9
- 0'dan uzak durmak, 204
- 0'la çarpma, 12
- 1, 5, 6, 12

- a^{-1} , 12
- Abel kıstası, 313
- Abel yakınsaklık kıstası, 313
- altın oran, 100
- altdizi, 115
- alterne seriler, 273
- altlimit, 211
- altsımr, 20
- alttan sınırlı küme, 20
- Arşimet, 76
- Arşimet cismi, 25, 71
- aralık, 16
- aritmetik ortalama, 16, 41, 49
- aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği, 42, 50, 131
- artan dizi, 107, 118, 199
- aşkın sayı, 177
- aşkın fonksiyon, 293
- azalan dizi, 118

- Bell sayısı, 180
- Bell, Eric Temple, 180
- Bernoulli, Jacob, 151
- Beyarslan, Özlem, 2
- bileşik faizler, 178
- bir, 5, 6
- birleşme özelliği, 9, 11
- Bolzano, 76
- Bolzano-Weierstrass Teoremi, 133, 143
- bölme, 12

- bölme, 26
- Brun sabiti, 239
- büzüşen dizi, 132, 135, 136
- büzüşme katsayısı, 136

- Cauchy, 76
- Cauchy çarpımı, 259, 265
- Cauchy dizisi, 109, 111, 115, 119
- Cauchy kıstası, 235, 288, 289
- cebirsal sayı, 177, 178
- Cesàro ortalaması, 267
- Cesàro toplamı, 269
- Cesàro toplamları, 270
- Cesàro, Ernesto, 270
- cisim, 19
- cos, 253, 265, 294, 298
- cosh, 285
- çarpımsal ters, 12
- çarpma, 5, 11
- çarpma (doğal sayılarda), 22
- çıkarma, 10

- d'Alembert kıstası, 289, 307
- d'Alembert yakınsaklık kıstası, 279, 307
- $d(x, y)$, 18
- \mathcal{D} , 65
- dalgalandıran seriler, 273
- değişme özelliği, 9, 11
- değişmeli grup, 19
- değişmeli halka, 19
- Demokrit, 76
- dizi, 63
- doğal sayılar kümesi, 22
- Dobinski formülü, 181
- düzgün sürekli, 126

- e , 94, 149
- eksi a , 10
- en büyük altsımr, 20
- en küçük üstsımr, 19, 211
- en küçük eleman, 23
- endis, 64
- entegral, 300
- Euler, 151
- Euler sabiti e , 149
- exp, 149, 158, 166, 253, 259, 298

- Fermat, Pierre de, 23

- Fibonacci dizisi, 132, 181
- genel terim, 228
- geometrik dizi, 91
- geometrik ortalama, 41, 49
- geometrik seri, 231, 280, 286
- gerçel üs alma, 125
- gerçel sayı, 9
- gerçel sayıların aksiyomları, 5
- gerçel sayıların tamlığı, 115
- göstergeç, 64
- grup, 19
- halka, 19
- harmonik seri, 236
- Hermite, Charles, 177
- hiperbolik kosinüs, 285
- hiperbolik sinüs, 285
- Huygens, Christian, 151
- ıraksak, 66
- ıraksamak, 230, 231
- ikiz asallar, 239
- inf, 20, 211
- integral, 296, 300
- irrasyonel sayılar, 37
- iyisıralı küme, 23
- kalanlar, 229
- kaos, 96
- kapalı kutular teoremi, 139, 140
- karşılaştırma/kıyaslama kısıtası, 254
- kesirli sayı, 27
- kesirli sayılar kümesi, 9, 27
- kıyaslama teoremi, 252
- kısmi toplamlar, 228
- Koch kartanesi, 95
- koşullu yakınsak seri, 254
- Korkmaz, Aslı Can, 2
- kök, 29
- Kummer, Ernst, 255
- kuvvet serisi, 292, 296
- küçüktür, 6
- Leibniz, 151, 273, 315
- Leibniz testi, 273
- $\lim_{n \rightarrow \infty}$, 69
- liminf, 213
- limit, 65, 69, 74
- limit (serilerde), 228
- limsup, 213
- Lindemann, Ferdinand von, 177, 178
- maksimum, 14
- max, 14
- Mechanica, 151
- mesafe, 18
- min, 14
- monoton diziler, 97, 120
- mutlak değer, 16
- mutlak negatif, 14
- mutlak pozitif, 14
- mutlak yakınsaklık, 251, 253
- \mathbb{N} , 21, 22
- Napier sabiti, 149
- Napier, John, 151
- negatif, 14
- onluk tabanda açılımı, 125
- oran kıyaslama testi, 255
- orta nokta, 16
- Oughtred, William, 151
- Özkaya, Görkem, 2, 191, 196, 309
- π , 76, 177, 178
- polinom, 88, 206, 207
- polinomlarda yakınsaklık, 88
- pozitif, 14
- pozitif seriler, 251
- \mathbb{Q} , 6, 9, 21, 27
- \mathbb{R} , 5
- $\overline{\mathbb{R}}$, 209, 211
- $\mathbb{R}^{>0}$, 16
- $\mathbb{R}^{\geq 0}$, 16
- Raabe kısıtası, 307, 308
- Riemann kısıtası, 304
- Riemann serisi, 301
- Riemann zeta fonksiyonu, 301
- \sum , 228
- sabit dizisi, 70
- sadeleştirme, 11, 13
- Sandviç Teoremi, 77
- seri, 230
- seriler, 227, 228
- serilerle işlemler, 259
- sıralı cisim, 9, 19
- sıralı değişmeli grup, 19
- sıralama, 14
- sıfır, 5, 6
- sıralı halka, 19
- $\sum_{i=1}^n$, 228
- $\sum_{i=0}^{\infty}$, 228
- $\sum_{i \geq 0}$, 228
- sin, 253, 265, 294, 298
- sinh, 285
- Sierpinski üçgeni, 95
- Sierpinski halısı, 96
- sınırlı, 80
- sınırlı dizi, 89, 113
- s_n , 227
- sonsuz, 106, 209
- sonsuz ıraksamak, 228
- sonsuz ıraksayan diziler, 103, 197
- sonsuzdan iniş, 23

SUP, 6, 19
sup, 20, 211
SUP aksiyomu, 19
süreklilik, 126
Şahin, Çiğdem, 2

tamkısım, 25
tamlık, 119, 120
tamsıralama, 19
tamsayılar kümesi, 26
teleskopik seri, 230, 233
terim terim işlem, 65
tersin tersi, 11, 13
toplama (seri), 228
toplama, 5, 9
toplama (doğal sayılarda), 22
toplamanın özellikleri, 9
toplamsal ters, 10
tümevarım ilkesi, 22
tümevarımsal altküme, 21
tümevarım ilkesi, 24
tümevarımla kanıt ilkesi, 22
türev, 296, 297

üçgen eşitsizliği, 16, 18
üs alma, 29
üstlimit, 211
üst sınır, 19, 211
üstten sınırlı kümeler, 20

X-dizisi, 63

yakınsak diziler, 63, 65, 66
yakınsaklık yarıçapı, 294
yakınsamak, 65, 74, 228, 230
yarısıralama, 19
yoğun, 27, 37

\mathbb{Z} , 21, 26, 27
zamanla 0'dan uzak durmak, 204
zamanla büzüşen dizi, 136
zamanla sabitleşen dizi, 64
Zenon, 76