

Ali Nesin  
**Analiz IV**

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



Nesin Yayıncılık A.Ş.  
İnönü Mahallesi Çimen Sokak No: 50/A Elmadağ Şişli/İstanbul  
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77  
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin  
**Analiz IV**

İlk basım Aralık 2011 (1000 adet)

Soyut Matematik 6  
Analiz 4  
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 13

004 01 02 002 - 157  
ISBN 978-605-5794-81-1  
Sertifika No: 18231

Editör  
Ali Nesin

Grafik Danışmanı  
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı  
Aslı Can Korkmaz  
Çiğdem Şahin

Baskı ve cilt  
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.  
Çiftelhavuzlar Cad. Prestij İş Merkezi No: 27/806 Zeytinburnu/İstanbul  
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

# İçindekiler

Önsöz . . . . .	1
<b>0 <math>\mathbb{R}</math> Örneği</b>	<b>3</b>
0.1 Bir Noktada Süreklilik ve Komşuluk . . . . .	3
0.1.1 Tartışma . . . . .	3
0.1.2 Komşuluk . . . . .	6
0.1.3 Bir Noktada Süreklilik . . . . .	10
0.1.4 Uygulamalar . . . . .	12
0.2 Süreklilik ve Açık Kümeler . . . . .	13
0.2.1 Açık Kümeler . . . . .	13
0.2.2 Sürekli Fonksiyonlar . . . . .	16
0.2.3 $\mathbb{R}$ 'nin Açık Altkümelerinin Sınıflandırılması . . . . .	23
<b>I Topoloji</b>	<b>25</b>
<b>1 Topolojik Uzay</b>	<b>27</b>
1.1 Tanım ve Örnekler . . . . .	27
1.2 Altkümelerin İçi . . . . .	31
<b>2 Topolojik Uzaylarda Diziler ve Limitleri</b>	<b>35</b>
2.1 Topolojik Uzaylarda Dizilerin Limitleri . . . . .	35
2.2 Hausdorff Uzaylar . . . . .	38
<b>3 Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar</b>	<b>43</b>
3.1 Süreklilik . . . . .	43
3.2 Bir Noktada Süreklilik ve Komşuluk . . . . .	46
<b>4 Topoloji Üretmek</b>	<b>49</b>
4.1 Giriş . . . . .	49
4.2 Topoloji Üretmek . . . . .	50
4.3 Öntaban . . . . .	52
4.4 $\mathbb{R}^2$ Üzerine Öklid Topolojisi . . . . .	54

4.5	Taban . . . . .	56
4.6	Üretilen Topoloji . . . . .	57
<b>5</b>	<b>İndirgenmiş Topoloji</b>	<b>63</b>
5.1	Bir Fonksiyonu Sürekli Kılmak . . . . .	63
5.2	İndirgenmiş/Kısıtlanmış Topoloji . . . . .	64
5.3	Fonksiyonun Değer Kümesinde Topoloji Bulmak . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Çarpım Topolojisi</b>	<b>71</b>
6.1	İki Fonksiyonu Aynı Anda Sürekli Kılmak . . . . .	71
6.2	Çarpım Topolojisi . . . . .	73
6.3	Sürekli Fonksiyonlar . . . . .	74
6.4	Çarpım Topolojisi (sonsuz) . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Topolojik Eşlemeler (Homeomorfizmalar)</b>	<b>83</b>
<b>8</b>	<b>Kapalı Kümeler</b>	<b>89</b>
8.1	Kapalı Kümeler . . . . .	89
8.2	Kapanış . . . . .	92
8.3	Yığılma Noktası . . . . .	96
8.4	Limit . . . . .	98
8.5	Çarpım Topolojisinde İç ve Kapanış . . . . .	99
<b>9</b>	<b>Bağlantılılık</b>	<b>101</b>
9.1	Bağlantılılık . . . . .	101
9.2	Gerçel Sayılar Kümesinde Bağlantılılık . . . . .	109
9.3	Kartezyen Çarpımda Bağlantılılık . . . . .	110
	<b>Topoloji Alıştırmaları</b>	<b>113</b>
<b>II</b>	<b>Metrik Uzaylar</b>	<b>115</b>
<b>10</b>	<b>Metrik Uzaylar</b>	<b>117</b>
10.1	Tanım . . . . .	117
10.2	Örnekler . . . . .	120
10.3	Yuvarlar . . . . .	128
10.4	Ultrametrik . . . . .	134
<b>11</b>	<b>Metrik Uzaylarda Dizi Yakınsaklığı</b>	<b>139</b>
11.1	Yakınsaklık . . . . .	139
11.2	Kartezyen Çarpımda Yakınsaklık . . . . .	143
11.3	Fonksiyon Kümelerinde Yakınsaklık . . . . .	145

11.4 Ultrametriklerde Yakınsaklık . . . . .	148
<b>12 Cauchy Dizileri ve Tam Metrik Uzayları</b>	<b>151</b>
12.1 Cauchy Dizileri . . . . .	151
12.2 Tam Metrik Uzaylar . . . . .	153
12.3 $p$ -sel Metrikte Cauchy Dizileri . . . . .	160
<b>13 Metrik Uzaylar, Topoloji ve Diziler</b>	<b>163</b>
13.1 Açık Kümeler . . . . .	163
13.2 Topoloji . . . . .	164
13.3 Yakınsaklık . . . . .	168
13.4 Kapalı Kümeler . . . . .	169
<b>14 Metrik Uzaylarda Süreklilik</b>	<b>173</b>
14.1 Süreklilik . . . . .	173
14.2 Dizisel Süreklilik ve Süreklilik . . . . .	179
14.3 Metrik Uzayların Normallığı . . . . .	180
<b>15 Metrik Uzayların Tamlaması</b>	<b>183</b>
15.1 Metrik Uzay Tamlaması . . . . .	183
15.2 Bir Tamlama Örneği: $p$ -sel Tamsayılar Halkası . . . . .	192
<b>III Tıkızlık</b>	<b>195</b>
<b>16 Tıkız Topolojik Uzaylar</b>	<b>197</b>
16.1 Örtü . . . . .	197
16.2 Tıkız Küme . . . . .	199
16.3 Basit ve Temel Özellikler . . . . .	201
16.4 Tıkızlığın Bir Başka Eşdeğer Koşulu . . . . .	205
16.5 Metrik Uzaylarda Tıkız Altkümeler . . . . .	207
16.6 Tıkız Kümelerin Sonlu Kartezyen Çarpımı . . . . .	208
16.7 $\mathbb{R}^n$ 'nin Tıkız Altkümeleri . . . . .	211
16.8 Tychonoff Teoremi . . . . .	213
<b>17 Çeşitli Tıkızlık Kavramları</b>	<b>217</b>
17.1 Yığılma Noktası Tıkızlık . . . . .	217
17.2 Dizisel Tıkızlık . . . . .	219
17.3 Tümünden Sınırlılık . . . . .	224
17.4 Sayılabilir Tıkızlık . . . . .	226
17.5 Metrik Uzaylarda Tıkızlık Kavramları . . . . .	227

<b>18 Tıkızlık Üzerine Daha Fazla</b>	<b>229</b>
18.1 Lebesgue Sayısı . . . . .	229
18.2 Düzgün Süreklilik . . . . .	230
18.3 Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaması . . . . .	232
<b>19 Cantor Kümesi</b>	<b>237</b>
19.1 Cantor Kümesi'nin İnşası . . . . .	237
19.2 Aritmetik Yaklaşım . . . . .	238
19.3 Geometrik Yaklaşım . . . . .	241
<b>IV Fonksiyonel Analizin Temelleri</b>	<b>249</b>
<b>20 Baire Kategori Teoremi</b>	<b>251</b>
20.1 Biraz Temel Topoloji . . . . .	251
20.2 Baire Uzayı . . . . .	253
<b>21 Fonksiyon Kümeleri ve Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık</b>	<b>263</b>
21.1 Fonksiyonlar Kümesi . . . . .	263
21.2 Noktasal Yakınsaklık . . . . .	264
21.3 Düzgün Yakınsaklık . . . . .	268
21.4 Sınırlı Fonksiyonlar Kümesi $\ell^\infty(X, Y)$ . . . . .	273
21.5 $\text{Fonk}(X, Y)$ Üzerine Mesafe . . . . .	274
21.6 Sürekli Fonksiyonlar Kümesi $C(X, Y)$ . . . . .	277
21.7 $\text{Fonk}(X, Y)$ 'nin Metrikleşmesi . . . . .	279
21.8 $Y = \mathbb{R}^n$ özel durumu . . . . .	280
<b>22 Stone-Weierstrass Teoremi</b>	<b>283</b>
<b>23 Arzelà ve Ascoli Teoremleri</b>	<b>287</b>
23.1 Giriş . . . . .	287
23.2 Sınırlılık . . . . .	289
23.3 Tümünden Sınırlılık ve Eşsüreklilik . . . . .	289
23.4 Arzelà ve Ascoli Teoremleri . . . . .	292
<b>24 Urysohn Önsavı ve Tietze Genişleme Teoremi</b>	<b>297</b>
24.1 Normal Uzaylar . . . . .	297
24.2 Urysohn Önsavı . . . . .	298
24.3 Tietze Genişleme Teoremi . . . . .	302
<b>Kaynakça</b>	<b>304</b>

# Önsöz

İstanbul Bilgi Üniversitesi'nin Matematik Bölümü'nde, içeriği aşağı yukarı bu kitap olan bir ders dördüncü dönem lisans öğrencilerine verilmektedir. Bunun için de ilk üç dönem aşağı yukarı ilk üç cildin içeriği okutulmaktadır. Öğrenciler zorlanıyorlar elbet, lise eğitimleri gözönüne alınca konu fazlaca soyut geliyor. Ama sebat edip çalışanlar gerçek birer matematikçi olarak mezun oluyorlar. Bu kitabın içeriğinin matematik bölümlerinin en geç üçüncü sınıfında okutulabileceğini, hatta okutulması gerektiğini düşünüyorum.

Alıştırmalar ve örnekler fazla yer kaplamasın, bu yüzden kitabın fiyatı artmasın diye küçük puntoyla yazdım. Ama bundan alıştırmalar ve örneklerin önemsiz oldukları anlamı çıkmamalı. Özellikle örnekleri metinde bol bol kullandım.

Ultrametriği ve  $p$ -sel sayıları metin boyunca sağa sola ve özellikle bölüm sonlarına serpiştirdim. Böylece okur hem somut olarak hesap yapabileceği bir örnek görmüş olacak hem de matematiğin en ilginç yapılarından biriyle haşır neşir olacak. Doğrusu içimden bu konuya daha fazla eğilmek geçti ama kendimi tuttum.

Bu arada Bölüm 0'ın önemsiz olmadığını, okunması ya da bilinmesi gerektiğini üstüne basa basa söyleyelim.

Selçuk Demir, Uğur Doğan, Zafer Ercan ve Yusuf Ünlü'nün kitaba çok önemli katkıları olmuştur. Uğur Doğan, Zafer Ercan ve Ali Törün kitabı satır satır okuyarak sayfalar dolusu hata buldular, çok değerli düzeltmeler ve iyileştirmeler yaptılar. Asistanlarım Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin Quark'ta yazılmış metni sabahlara kadar çalışarak L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X'e aktardılar ve bana büyük kolaylık sağladılar. Sonat Süer L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X konusunda çok yardımcı oldu. Katkısı olan herkese ve sabırda Eyüp Sultan'ı da aşan eşim Özlem Beyarslan'a teker teker ve tekrar tekrar teşekkürlerimi sunarım.

Hataları, eksikleri, fazlalıkları, ifade bozukluklarını, zor anlaşılabilir yerleri ve her türlü önerinizi anesin@bilgi.edu.tr adresine yollarsanız çok makbule geçer, gelecek basımlarda düzeltirim.

Ali Nesin, 18 Kasım 2011

# 0. $\mathbb{R}$ Örneği

Bu bölümde, bir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun sürekliliğinin tanımından  $\epsilon$  ve  $\delta$  sayılarını atıp yerlerine kümeler kuramını andıran tanımlar vereceğiz. Böylece analiz konusu gerçel sayılardan soyutlanıp, adına **topoloji** denilen çok daha genel bir konu haline gelecek. Yani bu bölümde topoloji kavramının nereden kaynaklandığını göstermeye çalışacağız. Topoloji konusuna gerçek anlamda Bölüm 1'de gireceğiz ve kitap esas olarak o zaman başlayacak.

## 0.1 Bir Nuktada Süreklilik ve Komşuluk

### 0.1.1 Tartışma

Bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğinin tanımını anımsatmakla başlayalım. Basitleştirmek için, şimdilik,  $\mathbb{R}$ 'nin herhangi bir  $X$  altkümesinden  $\mathbb{R}$ 'ye giden bir fonksiyonla değil de  $\mathbb{R}$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye giden bir fonksiyonla çalışalım, her şey daha kolay olacak.

$a \in \mathbb{R}$  ve  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olsun.  $a$ 'da sürekliliğin tanımı şöyledir [N5]:

**A.** Her  $\epsilon > 0$  için öyle bir  $\delta > 0$  var ki, her  $x \in \mathbb{R}$  için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Bu tanımı değiştire değiştire bir başka biçimde yazacağız; buram buram kümeler kuramı kokan bir biçimde. Tanımdaki  $\epsilon$  ve  $\delta$  sayılarından ve eşitsizlik işaretlerinden kurtulacağız; bir bedel karşılığında elbette: Tanımdaki  $\epsilon$  ve  $\delta$  sayıları yerine  $\mathbb{R}$ 'nin bazı özel altkümeleri yer alacak.

$f$ 'nin  $a$ 'da sürekliliğini şöyle ifade edelim:

**B.** Her  $\epsilon > 0$  için öyle bir  $\delta > 0$  var ki, her  $x \in \mathbb{R}$  için,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Ya da şöyle:

**C.** Her  $\epsilon > 0$  için öyle bir  $\delta > 0$  var ki

$$f(a - \delta, a + \delta) \subseteq (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Ya da şöyle:

**D.** Her  $\epsilon > 0$  için öyle bir  $\delta > 0$  var ki

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Demek ki,  $f$  fonksiyonunun  $a$ 'da sürekli olması demek,  $\epsilon > 0$  hangi sayı olursa olsun,

$$(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

aralığının önimgesinin, yani

$$f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

kümesinin  $(a - \delta, a + \delta)$  biçiminde bir aralık içermesi demektir. İlk olarak,  $(a - \delta, a + \delta)$  yerine  $I$  yazıp  $\delta$ 'dan kurtulalım:

**E.** Her  $\epsilon > 0$  için  $a$ 'yı içeren öyle bir  $I$  açık aralığı var ki

$$I \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

(D) koşuluyla (E) koşulunun eşdeğer oldukları daha önceki eşdeğerlikler kadar bariz değil, kanıtlayalım: Eğer (D) doğruysa, elbette (E) koşulu da doğrudur. Öte yandan, (E) koşulu doğruysa (D) koşulu da doğrudur. Nitekim eğer verilmiş  $\epsilon > 0$  için,

$$I \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

içindeliğini sağlayan ve  $a$ 'yı içeren açık bir  $I$  aralığı varsa, o zaman, belli bir  $\delta > 0$  sayısı için

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq I$$

olur. Dolayısıyla

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq I \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

olur, yani (D) koşulu doğrudur.

Sürekliliğin tanımıyla daha fazla oynayabilmek için bir tanıma gereksiniyoruz.

$\mathbb{R}$ 'nin,  $a$ 'yı içeren açık bir aralığını içeren altkümelerine  $a$ 'nın **komşuluğu** diyelim. Yani eğer  $V \subseteq \mathbb{R}$  altkümesi, açık bir  $I$  açık aralığı için,

$$a \in I \subseteq V$$

içinliklerini sağlıyorsa,  $V$ 'ye  $a$ 'nın **komşuluğu** diyelim.

Tanımda  $V$ 'nin  $I$ 'ya eşit alınabileceğine dikkat edelim, yani  $a$ 'yı içeren her  $I$  açık aralığı  $a$ 'nın bir komşuluğudur. Demek ki her açık aralık, içerdiği her noktanın bir komşuluğudur.

Eğer  $V$ ,  $a$ 'nın bir komşuluğuyorsa ve  $V \subseteq W$  ise,  $W$  de  $a$ 'nın bir komşuluğudur elbette. Bu, birazdan gerekecek.

Komşuluğun tanımından dolayı (E) koşulu şu koşula denktir:

# 1. Topolojik Uzay

Geçen bölümde  $\mathbb{R}$ 'nin, adına “açık” dediğimiz bazı altkümelerini tanımladık ve bir fonksiyonun sürekliliğini tamamen açık kümeler yardımıyla (hiç  $\epsilon$  ve  $\delta$  kullanmadan) ifade ettik. Böylece bir fonksiyonun sürekliliğini kümeler kuramı seviyesine indirdik. Aynı şeyi bugüne kadar analizde tanımladığımız hemen hemen her kavram için yapabiliriz. Böylece analitik kavramları fiziksel dünya olarak niteleyebileceğimiz  $\mathbb{R}$ 'den kurtarıp, bu kavramları çok daha soyut ve genel bir evrene genelleştirebiliriz. Her ne kadar yapacaklarımız uç seviyede soyutsa da, kanıtları kolaylaştırdığından ve daha genel olduklarından çok daha fazla uygulamaya izin verir. Güzelliği de cabası.

## 1.1 Tanım ve Örnekler

Geçen bölümde,  $\mathbb{R}$ 'nin bir  $X$  altkümesi için,  $X$ 'in “açık altküme”lerini bir biçimde tanımlamış ve Önsav 0.16'da bu açık altkümelerin şu özellikleri sağladıklarını kanıtlamıştık:

**X1.**  $\emptyset$  ve  $X$  kümeleri açıktır.

**X2.** İki açık kümenin kesişimi açıktır.

**X3.** Açık kümelerin bileşimi açıktır.

Şimdi, herhangi bir  $X$  kümesi verilmiş olsun.  $X$ 'in yukardaki gibi  $\mathbb{R}$ 'nin altkümesi olması filan gerekmiyor, herhangi bir küme olabilir. (Topolojinin güzelliği de işte tam burada.)  $X$ 'in bazı altkümelerine “açık” adını verelim ve açık dediğimiz bu altkümelerin yukardaki X1, X2, X3 özelliklerini sağladıklarını varsayalım. O zaman  $X$  üzerinde bir “*topoloji*” tanımlanmış olur. Eğer  $\tau$ , elemanları, adına açık adını verdiğimiz kümelerden oluşan kümeysen,  $(X, \tau)$  çiftine *topolojik uzay* denir.

Tanımı daha matematiksel verelim.  $X$  herhangi bir küme olsun.  $X$ 'in altkümelerinin kümesini  $\wp(X)$  ile simgelediğimizi anımsatalım.

$$\tau \subseteq \wp(X)$$

olsun. Yani  $\tau$ , elemanları  $X$ 'in bazı altkümeleri olan bir küme olsun<sup>1</sup>.  $\tau$ 'nın

---

<sup>1</sup> $\tau$ , Yunan alfabesinin t harfidir ve “tau” diye okunur

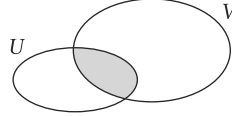
şu özellikleri sağladığını varsayalım:

**T1.**  $\emptyset, X \in \tau$ .

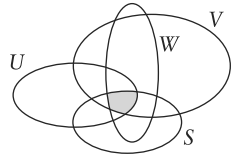
**T2.** Eğer  $U, V \in \tau$  ise  $U \cap V \in \tau$ .

**T3.** Eğer her  $i \in I$  için  $U_i \in \tau$  ise  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .

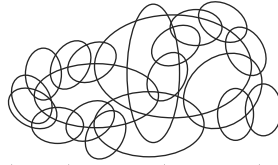
Çoğu zaman  $\tau$ 'nın ne olduğu konunun gelişinden bellidir; o zaman,  $(X, \tau)$  çifti yerine sadece  $X$ 'in kendisine **topolojik uzay** denir.



$U$  ve  $V$  açıksa  $U \cap V$  de açıktır.



Dolayısıyla, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.



Sonlu ya da sonsuz, kaç tane olursa olsun, açık kümelerin bileşimi hep açıktır.

T1, T2 ve T3 koşullarıyla X1, X2, X3 koşulları eşdeğerdir elbette. Bir  $X$  kümesi üzerinde bir topoloji tanımlamak demek,  $X$ 'in açık kümelerini bir biçimde belirlemek demektir. Açık adı verilen bu kümeler X1, X2, X3 özelliklerini sağlamalıdır.

Bir önceki bölümde  $\mathbb{R}$  üzerinde tanımladığımız topolojiye **Öklid topolojisi** adı verilir. O topolojide, açık kümeler açık aralıkların bileşimi olarak tanımlanmıştı.  $\mathbb{R}$  üzerinde ya da herhangi bir  $X$  kümesi üzerinde çok farklı topolojiler tanımlayabiliriz. Birazdan birçok farklı örnek sunacağız.

İki açık kümenin kesişimi açık olduğundan, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır. Bu, açık küme sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. Ama sonsuz sayıda açık kümenin kesişimi açık olmayabilir, örneğin, Öklid topolojisinde

$$\bigcap_{\epsilon > 0} (-\epsilon, \epsilon) = \{0\}$$

olur ve tek elemanlı kümeler bu topolojide açık değildirler (elbette).

Aşağıdaki önsav basit ama son derece kullanışlıdır.

**Önsav 1.1.**  $X$  bir topolojik uzay ve  $Y \subseteq X$  olsun.  $Y$ 'nin açık olması için her  $y \in Y$  için,  $y \in U_y \subseteq Y$  içindeliklerini sağlayan açık bir  $U_y$  altkümesi olması yeter ve gerek koşuldur.

**Kanıt:** Eğer  $U$  açıksa her  $y \in U$  için  $U_y = U$  almak yeterli. Diğer istikamet:  $U = \bigcup_{y \in Y} U_y$  olduğundan,  $U$  açıktır.  $\square$

Eğer  $\tau_1$  ve  $\tau_2$ ,  $X$  üzerine birer topolojiyse ve  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  ise,  $\tau_1$ 'e  $\tau_2$ 'den daha **kaba**,  $\tau_2$ 'ye  $\tau_1$ 'den daha **ince** topoloji adı verilir.

Şimdi topolojik uzay örneklerine geçelim. Örneklerin çeşitliliği konunun zenginliğine delalettir. Aşağıdaki örneklerde  $X$  herhangi bir küme olabilir.

### Örnekler

- 1.1.  $X$  herhangi bir küme ve  $\tau = \{\emptyset, X\}$  olsun. Bu, kolayca görüleceği üzere  $X$  üzerinde bir topolojidir. Pek fazla açık kümesi olmadığından, hatta  $T_1$ 'den dolayı olabilecek en az sayıda açık kümesi olan bu topolojiye **en kaba topoloji** (yani  $X$ 'in en kaba topolojisi) adı verilir. Eğer  $X$  boşkümeysen ya da tek bir elemanı varsa, o zaman  $X$  üzerinde bu topolojiden başka topoloji yoktur.
- 1.2. En kaba topolojiyle zıt konumda olan ve adına **ayrık topoloji** denen bir de en ince ya da en zengin topoloji vardır. Bu topolojide  $X$ 'in her altkümünün açık olduğuna hükmedilir, yani  $\tau$  kümesi  $\wp(X)$  kümesine eşittir.  $\wp(X)$ 'in  $T_1$ ,  $T_2$  ve  $T_3$  özelliklerini sağladığı çok belli.
- 1.3.  $X$ 'in tümleyenini sonlu olan altkümelerine açık adımları verelim. Bir de ayrıca boşkümeyle açık diyelim. O zaman  $X$  üzerinde bir topoloji tanımlanmış oluruz. Eğer  $X$  sonluyorsa, bu topoloji aynen bir önceki paragrafta tanımlanan en ince topolojidir. Ama eğer  $X$  sonsuzsa (mesela  $X = \mathbb{Z}$  ya da  $\mathbb{R}$  ise), o zaman bambaşka ve oldukça ilginç bir topoloji elde ederiz. Bu topolojiye **Fréchet topolojisi** ("freşe" okunur) adı verilir.
- 1.4.  $A$ ,  $X$ 'in herhangi bir altkümesi olsun.  $\tau = \{\emptyset, A, X\}$  olsun. Bu da  $X$  üzerinde topolojik bir yapı belirlenir. En fazla üç açık kümesi olduğundan, oldukça fakir bir topoloji olduğunu söyleyebiliriz. Bu topoloji, ayrıca  $A$  kümesinin açık olduğu en küçük topolojidir.
- 1.5.  $A$  ve  $B$ ,  $X$ 'in herhangi iki altkümesi olsun.  $\tau = \{\emptyset, A, B, A \cap B, A \cup B, X\}$  olsun. Bu da  $X$  üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji  $A$  ve  $B$  kümelerinin açık olduğu en küçük topolojidir.
- 1.6.  $A$ ,  $B$  ve  $C$ ,  $X$ 'in herhangi üç altkümesi olsun. Bu altkümelerin açık olduğu en küçük topolojiyi bulalım. Biraz daha zorlanacağız.  $\tau$ , tabii ki  $X$ 'in

$$\emptyset, A, B, C \text{ ve } X$$

altkümelerini içermeli, yani bu kümeler tanımlayacağımız topolojide açık olmalı. Ama, topolojimiz,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  altkümelerinin

$$A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$$

kesişimlerini de içermeli, çünkü ne de olsa sonlu sayıda açık kümenin kesişimi gene açık olmalı. Topolojimiz bu altkümeleri içerdiği gibi şimdiye kadar bulduğumuz açık kümelerin bileşimlerini de içermeli, yani,

$$\begin{aligned} &A \cup B, B \cup C, C \cup A, \\ &A \cup (B \cap C), B \cup (C \cap A), C \cup (A \cap B), \\ &(A \cap B) \cup (B \cap C), (B \cap C) \cup (C \cap A), (C \cap A) \cup (A \cap B), \\ &(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{aligned}$$

altkümelerini de içermeli. Yanlış saymadıysak toplam 19 küme etti. Bu kadarı yetiyor. Yukardaki 19 küme  $X$  üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojinin  $X$ 'in  $A$ ,  $B$  ve  $C$  altkümelerinin açık olduğu en küçük topoloji olduğu besbelli.

- 1.7.  $A, X$ 'in herhangi bir altkümesi olsun.  $\tau = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$  olsun.  $\tau, X$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide, boşküme dışında,  $A$  ve  $A$ 'yı içeren altkümeler açıktır, diğerleri değildir.  $\tau = \{U \subseteq X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$  aynı  $X$  kümesi üzerine bir başka topolojidir.
- 1.8.  $(X, \leq)$  bir sıralama olsun [N3]. Yani  $\leq$  ikili ilişkisi her  $x, y, z \in X$  için, şu özellikleri sağlasın:

$$\begin{aligned} x &\leq x, \\ x &\leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y, \\ x &\leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z. \end{aligned}$$

Örneğin  $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ve sıralama bildiğimiz, ilkokuldan beri aşına olduğumuz sıralama olabilir, ya da  $X$  bir ordinal ya da kardinal olabilir.  $a, b \in X$  için,

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in X : a < x < b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in X : a < x\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \in X : x < b\} \end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. (Burada  $x < y$ , " $x \leq y$  ve  $x \neq y$  anlamına gelmektedir.) Bunlara **açık aralık** diyelim. Açık aralıkların bileşimi olarak yazılan kümelere de "açık küme" diyelim. Böylece  $X$  üzerinde bir topoloji tanımlanmış olur. Bu topolojiye  $\leq$  sıralaması tarafından üretilmiş **sıralama topolojisi** denir.  $\mathbb{R}$ 'nin Öklid topolojisiyle bilinen sıralamasıyla üretilen sıralama topolojisi aynı topolojidir.

- 1.9. (Tümleyeni sayılabilir topoloji)  $X$  herhangi bir küme olsun. (Ama  $X$ 'i  $\mathbb{R}$  gibi sayılamaz sonsuzlukta bir küme alırsak daha iyi ederiz, yoksa ilginç bir örnek elde etmeyiz.)  $X$ 'in, tümleyeni sayılabilir sonsuzlukta olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de tabii boşküme açık olsun. O zaman  $X$  üzerinde bir topoloji tanımlanmış oluruz ve bu topoloji Örnek 1.3'te tanımlanan Fréchet topolojisinden daha incedir, yani Fréchet topolojisinde açık olan her küme bu topolojide de açıktır.. Bu topolojide sayılabilir sonsuzlukta açık kümenin kesişimi gene açıktır. Bu topolojiyi elbette başka kardinalitelere de genelleştirebiliriz.
- 1.10. (İndirgenmiş Topoloji)  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $Y \subseteq X$  bir altküme olsun.  $Y$  üzerine şöyle bir topoloji tanımlayalım:  $V \subseteq Y$  "açık"tır ancak ve ancak  $X$ 'in açık bir  $U$  kümesi için  $V = Y \cap U$  oluyorsa. Yani  $Y$ 'nin açık kümeleri  $X$ 'in açık kümeleriyle  $Y$ 'nin kesişimi olsun. Bunun gerçekten bir topoloji tanımladığını ilerde göreceğiz (Bölüm 5) ama okur şimdiden bu tanımın  $Y$  üzerine bir topoloji yarattığını kanıtlamalıdır. Eğer  $X = \mathbb{R}$  Öklid topolojisiyle donatılmışsa ve  $Y \subseteq \mathbb{R}$  ise,  $Y$  üzerine böylece elde edilen topolojiye de **Öklid topolojisi** diyeceğiz.
- 1.11. Eğer  $X$  bir topolojik uzaysa ve  $f$  fonksiyonu  $X$  ile bir  $Y$  kümesi arasında bir eşlemeyse, o zaman  $X$ 'in topolojisini  $f$  eşlemesini kullanarak  $Y$ 'ye taşıyabiliriz. Örneğin  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $f(0) = 1, f(1) = 0$  ve  $x \neq 0, 1$  için  $f(x) = x$  olarak tanımlanmışsa, bu yöntemle  $\mathbb{R}$ 'nin Öklid topolojisi  $\mathbb{R}$ 'nin bir başka topolojisine dönüşür. Bu yeni topolojide  $(-1, 0) \cup (0, 1]$  kümesi  $(-1, 1)$  aralığının  $f$  altında imgesi olduğundan açıktır. Ve mesela  $(1/n)_n$  dizisi bu topolojide 0'a değil 1'e yakınsar. (Topolojik uzaylarda limit kavramını daha sonra göreceğiz.)

### Alıştırılmalar

- 1.1.  $X$  bir küme olsun.  $X$  üzerinde bir topolojinin en ince topoloji olması için,  $X$ 'in tek elemanlı altkümelerinin açık olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.
- 1.2.  $x \in \mathbb{R}$  olsun.  $[x, \infty)$  aralığının  $\mathbb{R}$ 'nin Öklid topolojisinde açık olmadığını kanıtlayın.
- 1.3.  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $X \subseteq Y$  olsun.  $\tau \cup \{Y\}$  kümesinin  $Y$  üzerinde bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.
- 1.4. İki elemanlı bir küme üzerinde kaç değişik topoloji vardır? Aynı soruyu üç elemanlı bir

# 10. Metrik Uzaylar

## 10.1 Tanım

Bu cildin ilk iki bölümünde  $\mathbb{R}$ 'de analiz konusunu işledikten sonra topolojiye eğilmiştik. Ama daha önceki ciltlerde hep  $\mathbb{R}$ 'de çalışmıştık, hiç  $\mathbb{R}$ 'nin dışına çıkmamıştık. Şimdi  $\mathbb{R}$ 'ye geri dönüp  $\mathbb{R}$ 'de tanımladığımız yakınsaklık, süreklilik gibi kavramların tanımlarına bir kez daha göz atalım. Daha sonra topolojiye geri döneceğiz.

Bir  $(x_n)_n$  gerçel sayılar dizisinin bir  $a$  gerçel sayısına yakınsaması demek, her  $\epsilon > 0$  sayısı için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir  $N$  sayısının var olması demektir.

Süreklilik için ise şu tanımı vermiştik: Bir

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun bir  $a$  sayısında sürekli olması demek, her  $\epsilon > 0$  sayısı için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir  $\delta > 0$  sayısının var olması demektir.

Her iki tanımda da kullanılan,

$$|x - y|$$

mutlak değer fonksiyonuna odaklanalım.

Tanımlarda mutlak değerden sözedildiğine göre, yakınsaklığa, limite, sürekliliğe dair teoremlerimizin kanıtlarında zorunlu olarak mutlak değer fonksiyonunu kullandık.

“Mutlak değer fonksiyonunu kullanmak” ne demektir? Matematikte, hiçbir zaman bir nesnenin kendisi (“nesnenin kendisi” her ne demekse!) kullanılmaz. Sadece o nesnenin bazı özellikleri kullanılır.

Botanikte elmanın kendisi, kimyada alkolün kendisi, biyolojide balığın kendisi kullanılabilir ama tamamıyla zihinsel bir uğraş olan matematikte bir nesnenin kendisi değil, nesnenin bazı özellikleri kullanılır. (Nesnenin kendisi kaybolup sadece özellikleri kaldığında, geriye kalana “kavram” adı verilir.)

Nitekim bir bilim dalı ne kadar çok nesneden uzaklaşırsa, o kadar kavramsal olur; bir de simgeleşmeye başladığında o zaman o bilim dalı matematiksel olmaya başlar.

Matematiksel bir kanıt sonlu sayıda sözcükten oluşur ve sonlu sayıda sözcükle matematiksel bir nesnenin ancak sonlu sayıda özelliği sayılabilir. Örneğin eşitsizlik üzerine bir sonucun kanıtında, eşitsizliğin anlamı ya da kendisi değil, eşitsizliğin,

$$\begin{aligned} x &\leq x, \\ x &\leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y, \\ x &\leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z, \\ \text{ya } x &\leq y \text{ ya da } y \leq x, \\ 0 &\leq x^2 \end{aligned}$$

gibi sonlu sayıda özelliği kullanılmıştır. Eşitsizliklerle ilgili bir teoremin kanıtında sadece yukardaki özellikler kullanılmışsa, o zaman o teorem, adı eşitsizlik olsun ya da olmasın, bu özellikleri sağlayan tüm ilişkiler için geçerlidir. Dolayısıyla, matematiksel bir teorem, kanıtında söz edilen sonlu sayıda özellikleri sağlayan **tüm** matematiksel nesnelere için kanıtlanmıştır.

Bu derin sözlerden sonra, yeryüzüne inip bugüne kadar matematik hayatımızda mutlak değer hangi özelliklerini kullandığımız sorusunu soralım.

Her şeyden önce, mutlak değer adı verilen şey, bir fonksiyondur,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  kümesinden  $\mathbb{R}^{\geq 0}$  kümesine giden bir fonksiyondur. Bu basit olgu dışında, önceki sayılarımızda mutlak değer fonksiyonu hakkında, her  $x, y, z \in \mathbb{R}$  için geçerli olan şu üç özelliği kullandık:

1.  $|x - y|$  sayısı ancak ve ancak  $x = y$  ise 0 olur (yoksa mutlak değer pozitiftir). Biçimsel yazılımla

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$2. |x - y| = |y - x|.$$

$$3. |x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Şimdi  $|x - y|$  yerine  $d(x, y)$  yazalım. Ne farkedecek ki! O zaman yukardaki özellikler şu hale dönüşürler:

$$1. d(x, y) = 0 \text{ ancak ve ancak } x = y \text{ ise.}$$

$$2. d(x, y) = d(y, x).$$

$$3. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Gerçek sayılarda analize dair tanımladığımız her kavramı ve kanıtladığımız hemen hemen her sonucu  $|x - y|$  yerine  $d(x, y)$  yazarak kanıtlayabilirdik (elbette!)

# 14. Metrik Uzaylarda Süreklilik

## 14.1 Süreklilik

Geçen bölümde her metriğin, tanımlandığı metrik uzay üzerine doğal olarak bir topoloji ürettiğini gördük. Anımsarsanız, topoloji, metriğin yuvarları tarafından üretilmişti. Aynı bölümde metrik uzaylardaki dizi yakınsaklığı kavramıyla topolojik uzaylardaki dizi yakınsaklığı kavramının örtüştüğünü gördük, aralarında bir fark yoktu. Bu bölümde, metrik uzayda “fonksiyonların sürekliliği” kavramlarını tanımlayıp, bu kavramın topolojik uzaylar için önceki kısımda tanımladığımız kavramlarla örtüştüğünü göreceğiz.

$(X, d)$  ve  $(Y, d')$  iki metrik uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Ayrıca  $a \in X$  olsun. Eğer her  $\epsilon > 0$  ve her  $x \in X$  için,

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir  $\delta > 0$  varsa, o zaman  $f$  fonksiyonuna  $a$ 'da **süreklili** denir.

Yukardaki koşulun,

$$x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon)$$

koşuluna eşdeğer olduğuna dikkatinizi çekeriz. Bu da, elbette

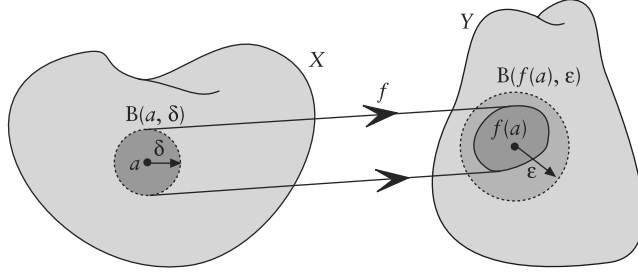
$$f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$$

demektir, ve bu son koşul da

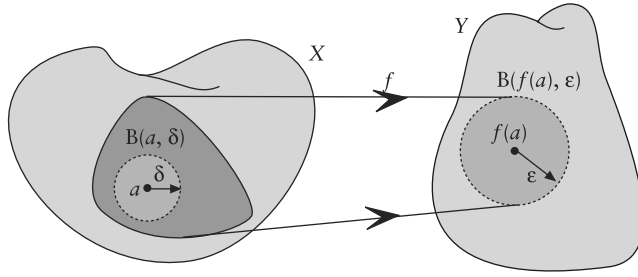
$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

koşuluna denktir. Böylece bir çırpıda bir noktada sürekliliğin dört değişik tanımını bulduk.

$f, a$ 'da süreklirse  
 $\epsilon > 0$  ne olursa olsun, öyle bir  $\delta > 0$  vardır ki,



$x \in B(a, \delta)$  ise  $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$  olur,  
yani  $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$  olur ya da...



$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$  olur.

Bu, tek bir noktada sürekliliğin tanımı. Her noktada sürekli olan bir fonksiyona kısaca **sürekli fonksiyon** denir.

Her izometri süreklidir elbette, ne de olsa izometrilere için  $\delta$ 'yı  $\epsilon$ 'a eşit almak yeterlidir.

Topolojik uzaylarda da fonksiyonların sürekliliğinin tanımını görmüştük. Her metrik uzay bir topolojik uzay ürettiğinden, her iki sürekliliğin de aynı anlama gelip gelmediği sorusunu sorabiliriz. Yanıt olumludur, olması gerektiği üzere...

**Teorem 14.1.**  $(X, d)$  ve  $(Y, d')$  iki metrik uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $f$ 'nin metrik uzaylar anlamında sürekli olmasıyla, metriklerin ürettiği topolojik uzaylar anlamında sürekli olması arasında bir fark yoktur, iki kavram örtüşür.

**Kanıt:** Önce  $f$ 'nin metrik uzaylar anlamında sürekli olduğunu varsayalım.  $V \subseteq Y$ ,  $Y$ 'nin bir açık kümesi olsun.  $f^{-1}(V)$ 'nin açık olduğunu kanıtlayacağız. Bu amaçla  $f^{-1}(V)$ 'den herhangi bir  $a$  elemanı alalım.  $a$  merkezli ve  $0$ 'dan büyük yarıçaplı bir yuvarın  $f^{-1}(V)$ 'nin altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Böylece  $f^{-1}(V)$  kümesinin  $Y$ 'de açık olduğu kanıtlanmış olacak.

$f(a) \in V$  olduğundan ve  $V$  açık olduğundan, topolojinin tanımına göre, öyle bir  $\epsilon > 0$  vardır ki,  $B(f(a), \epsilon) \subseteq V$  olur. Fonksiyon her yerde olduğu gibi

$a$ 'da da sürekli. Demek ki öyle bir  $\delta > 0$  vardır ki,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur.

Şimdi de  $f$ 'nin topolojik anlamda sürekli olduğunu varsayalım.  $X$ 'ten herhangi bir  $a$  elemanı alalım.  $\epsilon > 0$  herhangi bir eleman olsun.  $B(f(a), \epsilon)$  açık bir küme olduğundan ve  $f$  sürekli olduğundan,

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

kümesi  $X$ 'in açık bir altkümesidir. Bu açık küme  $a$ 'yı içerdiğinden,  $a$  merkezli ve  $0$ 'dan büyük yarıçaplı bir yuvar içerir. Demek ki bir  $\delta > 0$  için,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

olur, ki bu da  $f$ 'nin  $a$ 'da sürekliliği demektir.  $\square$

Benzer bir teoremi tek bir noktada süreklilik için de kanıtlayabiliriz.

**Teorem 14.2.**  $(X, d)$  ve  $(Y, d')$  iki metrik uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $a \in X$  olsun.  $f$ 'nin metrik uzaylar anlamında  $a$ 'da sürekli olmasıyla, metriklerin gerdiği topolojik uzaylar anlamında  $a$ 'da sürekli olması arasında bir fark yoktur, her iki kavram örtüşür.

**Kanıt:** Önce  $f$ 'nin metrik uzaylar anlamında  $a$ 'da sürekli olduğunu varsayalım.  $f(a) \in V \subseteq Y$ ,  $f(a)$ 'nın  $Y$ 'de bir komşuluğu olsun.  $f^{-1}(V)$ 'nin  $a$ 'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlamalıyız. Komşuluğun tanımı gereği,

$$f(a) \in V' \subseteq V$$

ilişkilerini sağlayan bir  $V'$  açık kümesi vardır. Topolojinin tanımı gereği, öyle bir  $\epsilon > 0$  vardır ki,

$$f(a) \in B(f(a), \epsilon) \subseteq V' \subseteq V$$

ilişkileri sağlanır.  $f$  metrik uzaylar anlamında sürekli olduğundan,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

içindeliğini sağlayan bir  $\delta > 0$  vardır. O zaman,

$$a \in B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur ki bu da  $f^{-1}(V)$ 'nin  $a$ 'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlar.

Şimdi  $f$ 'nin topolojik anlamda  $a$ 'da sürekli olduğunu varsayalım.  $\epsilon > 0$  olsun.  $B(f(a), \epsilon)$  yuvarı, açık bir küme olduğundan  $f(a)$ 'nın bir komşuluğudur.

# 16. Tıkız Topolojik Uzaylar

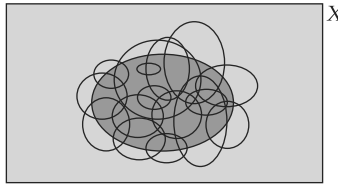
Bölümün uzunluğundan da anlaşılacağı üzere, bir topolojik uzayın tıkız altkümeleri çok önemlidir. (Bu giriş yazısı daha ilginç bir cümleyle başlayabilirdi ama ne yapalım ki bu dediğimiz çok doğru! Topologların azımsanamayacak bir bölümü yıllarını topolojik uzayların tıkız altkümelerini bulmaya ya da betimlemeye harcarlar.) Çünkü birazdan tanımlayacağımız tıkız altkümeler - çoğu zaman sonsuz olmalarına karşın - birçok anlamda sonlu altkümelerin oynadığı rolü oynarlar. Analiz de büyük ölçüde tıkız kümeler, bu da olmadı yerel tıkız topolojik uzaylar üzerinde yapılır. Tıkız kümeler sadece matematikte değil, (en azından diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığında oynadıkları rolden dolayı) fizikte de çok önemlidir. Ayrıca topolojiyi anlayıp anlamadığımızı bu bölümdeki teoremlerin hepsini kendi kendinize hiç yardım görmeden kanıtlayıp kanıtlayamadığınıza göre sınavabilirsiniz.

## 16.1 Örtü

Bir tanımla başlayalım.  $X$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$ 'nın bir **örtüsü**,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

için deliğini sağlayan,  $X$ 'in  $U_i$  altkümelerinden oluşan bir  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  ailesidir. Temsili resim aşağıda.

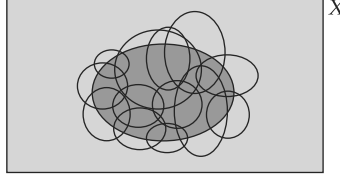


A koyu gri alan,  $U_i$ 'ler küçük oval alanlar.

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  ailesi,  $\bigcup_{i \in I} U_i$  bileşiminin her altkümesinin bir örtüsüdür elbette. Her ne kadar bir  $\mathcal{U}$  ancak bir kümenin örtüsü olabiliyorsa, yani kendi başına

bir örtü olması anlamsızsa da biz sık sık kümenin bilindiğini varsayıp  $\mathcal{U}$  örtüsünden sözedeceğiz.

Eğer  $(U_i)_{i \in I}$  örtüsünün her  $U_i$  kümesi açıksa, o zaman  $(U_i)_{i \in I}$  örtüsüne **açık örtü** denir.



Yukardaki  $(U_i)_{i \in I}$  örtüsünün bir altörtüsü  
(Yukardaki  $U_i$ 'lerden üçü eksik.)

Eğer bir  $J \subseteq I$  altkümesi için  $\mathcal{V} = (U_j)_{j \in J}$  ailesi de  $A$ 'nın bir örtüsü oluyorsa, o zaman  $\mathcal{V}$  örtüsüne  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  örtüsünün **altörtüsü** denir.

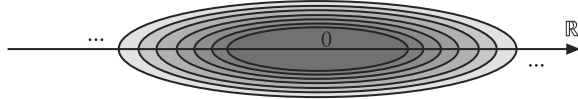
Eğer  $I$  göstergeç kümesi sonluysa  $A$ 'nın  $(U_i)_{i \in I}$  örtüsüne **sonlu örtü** adı verilir. "Sonlu altörtü" deyiminin ne demek olduğu belli olmalı: Altörtü tanımındaki  $J$  sonluysa,  $A$ 'nın  $\mathcal{V} = (U_j)_{j \in J}$  örtüsüne  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  örtüsünün **sonlu altörtüsü** adı verilir.

$(U_i)_{i \in I}$ ,  $A$ 'nın bir örtüsüyse ve  $B \subseteq A$  ise  $(U_i)_{i \in I}$ ,  $B$ 'nin de bir örtüsüdür. Elbette. Ve eğer  $A \subseteq B$  ise  $(U_i \cap B)_{i \in I}$  de  $B$ 'nin bir örtüsüdür. Bu da elbette.

Birkaç basit örnek verelim.

### Örnekler

- 16.1.  $((-n, n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{R}$ 'nin, aralıklardan oluşan bir açık örtüsüdür. Eğer bu örtüden sonlu sayıda aralık atarsak gene  $\mathbb{R}$ 'nin bir örtüsünü (dolayısıyla orijinal örtünün bir altörtüsünü) elde ederiz.  $((-n, n))_{n \in 2\mathbb{N}}$  de bu örtünün bir altörtüsüdür.

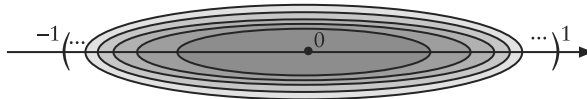


Daha genel olarak, eğer  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sınırlı olmayan bir fonksiyonsa,  $((-f(n), f(n)))_{n \in \mathbb{N}}$  de bu örtünün bir altörtüsüdür. Bu ailenin sonlu bir altörtüsü yoktur.

- 16.2.  $((-1 + 1/n, 1 - 1/n))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  ailesi  $(-1, 1)$  aralığının açık bir örtüsüdür:

$$(-1, 1) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} (-1 + 1/n, 1 - 1/n).$$

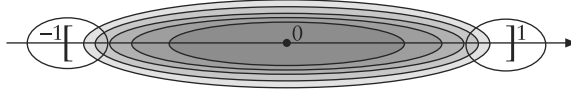
(Aşında eşitlik geçerli.) Bu aileden sonlu sayıda aralık silerseniz, gene  $(-1, 1)$  aralığının bir örtüsünü elde ederiz, yani orijinal örtünün bir altörtüsünü buluruz. Bu ailenin de sonlu bir altörtüsü yoktur.



- 16.3.  $((-1 + 1/n, 1 - 1/n))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  ailesi  $[-1, 1]$  kapalı aralığının bir örtüsü değildir (bkz. aşağıdaki şekil), çünkü örtü 1 ve  $-1$  elemanlarını örtmez, ama bu örtüye  $(-8/7, -7/8)$  ve  $(7/8, 8/7)$  aralıklarını eklersek  $[-1, 1]$  kapalı aralığının açık bir örtüsünü elde ederiz.

$$(-8/7, -7/8), (-8/9, 8/9), (7/8, 8/7)$$

aralıkları yukardaki örtünün sonlu bir altörtüsüdür.



Örnek 16.1 ve 16.2'yle Örnek 16.3 arasındaki ayrımı gözler önüne serelim: Örnek 16.1 ve 16.2'deki örtülerin sonlu altörtüleri yoktur, ama Örnek 16.3'teki örtünün vardır. Örnek 16.1'deki  $\mathbb{R}$  ve Örnek 16.2'deki  $(-1, 1)$  açık aralığı “tıkız” değildir ama Örnek 16.3'teki  $[-1, 1]$  kapalı aralığı “tıkız”dır. Tıkız kümenin matematiksel tanımı hemen şimdi geliyor.

### Alıştırmalar

- 16.1.  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$  ailesi  $Y$ 'nin bir örtüsüyse,  $\mathcal{U} = (f^{-1}(V_i))_{i \in I}$  ailesinin  $X$ 'in bir örtüsü olduğunu kanıtlayın. Eğer  $f$  süreklirse ve  $\mathcal{V}$ ,  $Y$ 'nin bir açık örtüsüyse,  $\mathcal{U}$ 'nun  $X$ 'in bir açık örtüsü olduğunu kanıtlayın.
- 16.2. Kesirli sayıları pozitif doğal sayılarla numaralandırıp  $(q_n)_n$  biçiminde bir dizi elde edelim.  $(B(q_n, 1/2^n))_n$  ailesinin  $\mathbb{R}$ 'yi örtmediğini kanıtlayın.
- 16.3.  $(q_n)_n$  yukardaki alıştırmadaki gibi olsun.  $(B(q_n, 1/n))_n$  ailesi  $\mathbb{R}$ 'yi örter mi?

## 16.2 Tıkız Küme

$X$  bir topolojik uzay ve  $K \subseteq X$  olsun. Eğer  $K$ 'nın **her** açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa  $K$ 'ya **tıkız** küme denir. (Tıkışık ya da kompakt dendiği de olur.) Yani  $K$ 'nın tıkız olması için,

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

içindeliliğini sağlayan  $X$ 'in **her**  $U_i \subseteq X$  açık altkümeleri için,

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

içindeliliğini sağlayan sonlu sayıda  $i_1, \dots, i_n \in I$  göstergesi olmalıdır.

Yukardaki tanımdaki “her” sözcüğünün altını çiziyoruz; tanımın kilit sözcüğüdür. Bulunan sonlu örtü de orijinal örtünün **altörtüsü** olmak zorundadır...

Bazı yazarlar, örneğin Bourbaki ve Fransız ekolü tıkızlığı sadece Hausdorff uzaylar için tanımlarlar. Biz daha genel olan akıma uyup öyle yapmayacağız.

Eğer  $X$  topolojik uzayında  $X$  kümesi tıkızsa,  $X$ 'e **tıkız topolojik uzay** denir. Önsav 16.1 bu tanımdan rahatsızlık duyanları yatıştıracaktır.

Hemen birkaç örnek ve karşıörnek verelim.

### Örnekler

- 16.4. Her topolojik uzayın her sonlu altkümesi (dolayısıyla boşküme de) tıkızdır. Elbette!
- 16.5. Eğer  $X$  kümesi ayrık metrikle donatılmışsa, o zaman bu topolojik uzayın sadece sonlu altkümeleri tıkız olabilirler. Nitekim her  $A$  altkümesi için  $(\{a\})_{a \in A}$  ailesi  $A$ 'nın açık bir örtüsüdür.
- 16.6. Sadece sonlu sayıda açık kümesi olan bir topolojik uzayın her altkümesi tıkızdır. Örneğin en kaba topolojiyle donatılmış her küme tıkızdır.
- 16.7. Örnek 16.2'den  $(-1, 1)$  açık aralğının (Öklid topolojisinde) tıkız olmadığı anlaşılıyor. Bu örnekten yola çıkarak, boş olmayan açık bir aralğın Öklid topolojisinde tıkız olmadığı kolaylıkla anlaşılır. Örnek 16.1'den de  $\mathbb{R}$ 'nin (Öklid topolojisiyle) tıkız olmadığı anlaşılıyor.

Çok daha önemli örnekler ileride verilecektir. Örneğin  $\mathbb{R}$ 'nin tüm tıkız altkümelerini kolay bir biçimde betimleyeceğiz (ama hayat her zaman  $\mathbb{R}$ 'de olduğu kadar basit değildir) ve ileride tıkız kümelerden başka tıkız kümeler yaratmanın çeşitli reçetelerini göreceğiz.

Sezgi kazandırması açısından  $\mathbb{R}$ 'nin tıkız altkümelerinin neler olduğunu kanıtlamadan söyleyelim:  $\mathbb{R}$ 'nin tıkız altkümeleri aynen  $\mathbb{R}$ 'nin kapalı ve sınırlı altkümeleridir. Bu, meşhur Heine-Borel teoremidir ve bu bölümde kanıtlanacaktır. Belki bu olgu “tıkız”ın menşesine dair bir bilgi verir: Tıkız altkümeler uzayıp gitmeyen, kendi içine kapalı altkümeler olarak algılanmalıdır. Tabii bu sadece bir algı olarak kalmalı, matematiksel bir olgu yatmıyor bu dediğimizin temelinde.

Okur  $[0, 1)$  aralğının tıkız olmadığını kanıtlayabilir. Sorunun 1'de olduğu hissediliyordur umarım. İlerde  $[0, 1]$  kapalı aralğının tıkız olduğunu göreceğiz. Demek ki tıkızlık tek bir nokta çıkarılınca bozulabiliyor, yani oldukça narin bir kavram.

Altbölüm 18.3'te, herhangi bir  $X$  topolojik uzayına tek bir nokta ekleyerek ve elde edilen kümeyi munasip bir topolojiyle donatarak (ama  $X$ 'in topolojisine dokunmayarak), nokta eklenmiş kümeyi tıkız bir topolojik uzaya dönüştürebileceğimizi göreceğiz.

### Alıştırmalar

- 16.4.  $X$  bir küme olsun.  $X$  üzerine  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  topolojilerini alalım.  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  olsun.  $X$ 'in bir altkümesi  $\tau_2$  için tıkızsa  $\tau_1$  için de tıkız olduğunu kanıtlayın.
- 16.5.  $\mathbb{R}$ 'nin sınırsız bir altkümesinin (Öklid topolojisinde) tıkız olamayacağını kanıtlayın. Genel olarak, tıkız bir metrik uzayın sınırlı olduğunu kanıtlayın.
- 16.6.  $[0, 1)$  aralğının (Öklid topolojisinde elbet) tıkız olmadığını kanıtlayın.
- 16.7. Sonlu sayıda tıkız kümenin bileşiminin de tıkız olduğunu kanıtlayın.
- 16.8.  $[0, 1]$  aralğının tıkız olduğunu kanıtlayın.
- 16.9.  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  tıkız mıdır?
- 16.10.  $\mathbb{Q}$ 'nün bir altkümesinin ancak sonluysa tıkız olabileceğini kanıtlayın.
- 16.11.  $\mathbb{Z}$ 'yi  $p$ 'sel metrikle donatarsak tıkız bir metrik uzay elde eder miyiz?
- 16.12. Tıkız bir kümenin kapalı altkümelerinin de tıkız olduğunu kanıtlayın.
- 16.13. Tıkız bir kümenin her altkümesi tıkız olmak zoruda mıdır?

# 20. Baire Kategori Teoremi

Baire Kategori Teoremi, fonksiyonel analiz ve topolojide önemli bir yere sahiptir. 1899'da René-Louis Baire tarafından doktora tezinde sunulmuştur. Fonksiyonel analizde Açık Fonksiyon Teoremi, Kapalı Grafik Teoremi ve Düzgün Sınırlılık Teoremi genelde bu teoremin yardımıyla kanıtlanır. Topolojide ise yoğun altkümeler hakkında önemli bilgiler sağlar<sup>1</sup>.

## 20.1 Biraz Temel Topoloji

Eğer  $X$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  ise,  $\text{cl}_X(A)$  ya da  $\bar{A}$  yazılımı  $A$ 'nın kapanışını,  $\text{int}_X(A)$  ya da  $A^\circ$  yazılımı ise  $A$ 'nın içini simgelesin.  $A^c$ , her zamanki gibi  $A$ 'nın  $X$ 'teki tümleyenini simgeliyor.  $\text{cl } A^c$ ,  $A^c$ 'nin kapanışı anlamına gelecek.

$$(A^\circ)^c = \text{cl } A^c \text{ ve } (A^c)^\circ = (\text{cl } A)^c$$

eşitlikleri Önsav 8.5'te kanıtlanmıştı. Bu eşitlikleri sık sık referans vermeden kullanacağız.

$A$ 'nın sınırı olan  $\text{Fr } A$  ya da  $\partial A$  kümesi

$$\text{Fr } A = \partial A = \text{cl } A \cap \text{cl } A^c$$

olarak tanımlanır.  $\partial A$ , iki kapalı kümenin kesişimi olduğundan elbette kapalı bir kümedir.

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A \cup \partial A, \\ A^\circ &= A \setminus \partial A\end{aligned}$$

eşitlikleri Alıştırma 8.22.i ve ii olarak sorulmuştu.

**Önsav 20.1.** *Eğer  $F$  bir topolojik uzayın kapalı bir altkümesi ise,  $(\partial F)^c$  yoğun ve açık bir altkümedir.*

**Kanıt:**  $(\partial F)^\circ = (\text{cl } F \cap \text{cl } F^c)^\circ = (F \cap \text{cl } F^c)^\circ \stackrel{1,2}{=} F^\circ \cap (\text{cl } F^c)^\circ = F^\circ \cap ((F^\circ)^c)^\circ \subseteq F^\circ \cap (F^\circ)^c = \emptyset$  olduğundan,  $\text{cl}((\partial F)^c) = ((\partial F)^\circ)^c = \emptyset^c = X$  olur. Açıklık ise bariz.  $\square$

<sup>1</sup>Bu bölüm Uğur Doğan ile birlikte yazılmıştır.

$X$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Eğer  $A$ 'nın kapanışının iç noktası yoksa, yani  $(\text{cl } A)^\circ = \emptyset$  ise,  $A$ 'ya  $X$ 'in **seyrek**<sup>2</sup> altkümesi denir.

$A$  seyrekse,  $A$ 'nın kapanışı da, kapanışının altkümeleri de seyreklerdir. Eğer  $X$  boşküme değilse,  $X$ 'in yoğun altkümeleri seyrek olamazlar. Kaba ve en ince topolojilerde sadece boşküme seyreklerdir.

**Önsav 20.2.**  $Y$  bir topolojik uzay ve  $A \subset X \subset Y$  olsun. Eğer  $A$ ,  $X$ 'te seyrekse  $Y$ 'de de seyreklerdir.

**Kanıt:**  $A$  yerine daha büyük bir küme olan  $\text{cl}_X(A)$  kümesini alıp  $A$ 'nın  $X$ 'te kapalı olduğunu varsayabiliriz.  $B = \text{cl}_Y(A)$  olsun.  $\text{Int}_Y(B) = \emptyset$  eşitliğini göstermek istiyoruz. Önsav 8.7'ye göre  $A = B \cap X$  olur.  $Y$ 'nin açık bir  $U$  altkümesi için  $U \subseteq B$  olsun.  $U$ 'nun boşküme olduğunu göstereceğiz.  $U \cap X$ ,  $X$ 'te açık olduğundan ve  $A$ 'nın bir altkümesi olduğundan,  $U \cap X = \emptyset$  olmalı. Demek ki  $A \subseteq B \setminus U$ . Ama  $B$  kapalı ve  $U$  açık olduğundan  $B \setminus U$  kümesi açıktır. Demek ki  $B = \text{cl}_Y(A) \subseteq B \setminus U$ , yani  $U = \emptyset$ .  $\square$

Öte yandan  $\emptyset \neq X \subset Y$  ise ve  $X$ ,  $Y$ 'nin seyrek bir altkümesi bile olsa,  $X$  hiçbir zaman  $X$ 'in seyrek bir altkümesi olmaz.

### Örnekler

- 20.1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ 'de seyreklerdir.
- 20.2.  $\mathbb{R} \times \{0\}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'de seyreklerdir.
- 20.3. Eğer  $A$  seyrekse,  $A$ 'nın her altkümesi de seyreklerdir. Ayrıca  $A$ 'nın kapanışı da, kapanışının altkümeleri de seyreklerdir.
- 20.4. Ama iki seyrek kümenin bileşimi seyrek olmak zorunda değildir. Örnek:  $X = A \sqcup B \sqcup C$  olsun ve  $A, B$  ve  $C$  boşküme olmasınlar.  $X$ 'in açık kümeleri  $\emptyset, A \sqcup B, B \sqcup C, C \sqcup A$  ve  $X$  olsun ve başka da açık kümesi olmasın. O zaman  $A, B$  ve  $C$  kapalıdır ve her birinin içi boşkümedir, yani her biri seyreklerdir. Öte yandan herhangi ikisinin bileşimi açık bir kümedir ve dolayısıyla seyrek değildir.
- 20.5. Cantor kümesinin seyrek olduğunu sayfa 240'ta görmüştük.

### Alıştırılmalar

- 20.1. Sonlu sayıda seyrek kümenin bileşiminin de seyrek olduğunu kanıtlayın.
- 20.2. Kanıtlayın:  $A \subseteq X$  için,  $A$ 'nın seyrek bir altküme olması için gerek ve yeter koşul  $(A^c)^\circ$ , yani  $(\text{cl } A)^c$  kümesinin (bkz. Önsav 8.5)  $X$ 'te yoğun olması koşuludur.
- 20.3.  $X$ 'in kapalı bir  $F$  altkümesi için,  $\partial F = F \setminus F^\circ$  kümesinin seyrek bir altküme olduğunu kanıtlayın.
- 20.4.  $X$ 'in kapalı bir  $A$  altkümesi için, aşağıdaki koşulların eşdeğer olduklarını kanıtlayın:
  - i.  $A$  seyrek bir altkümedir.
  - ii.  $A^\circ = \emptyset$ ,
  - iii.  $\text{cl } A^c = X$ .
- 20.5. Eğer  $U \subseteq X$  açıksa,  $\partial U$  kümesinin seyrek olduğunu kanıtlayın.

<sup>2</sup>İngilizcesi *nowhere dense* ya da *rare*

$X$  bir topolojik uzay ve  $M \subseteq X$  olsun. Eğer  $M$ ,  $X$ 'in sayılabilir sayıda seyrek altkümelerinin bileşimiye (ki bu seyrek altkümeler  $M$ 'de kapalı alınabilir),  $M$ 'nin  $X$ 'in *birinci kategoriden* ya da *zayıf*<sup>3</sup> *altkümeleri* olduğu söylenir. Eğer  $M$  birinci kategoriden değilse  $M$ 'nin  $X$ 'in *ikinci kategoriden altkümeleri* olduğu söylenir.

### Alıştırmalar

- 20.6.  $X$  bir topolojik uzay olsun. Sayılabilir çoklukta birinci kategoriden altkümenin bileşiminin de birinci kategoriden olduğunu kanıtlayın.
- 20.7. Ayrık noktası olmayan bir metrik uzayın sayılabilir her  $M$  altkümelerinin birinci kategoriden olduğunu kanıtlayın.
- 20.8.  $A \subseteq X \subseteq Y$  olsun. Eğer  $A$ ,  $X$ 'te birinci kategoridense,  $Y$ 'de de birinci kategoriden olduğunu gösterin.

## 20.2 Baire Uzayı

Aşağıdaki birbirine denk özelliklerden birini sağlayan bir topolojik uzaya *Baire uzayı* adı verilir.

**Teorem 20.3.** *Boş olmayan bir  $X$  topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir, yani biri doğruysa diğerleri de doğrudur:*

**a.**  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  her biri  $X$ 'te yoğun olan bir açık altküme ailesi olsun. O zaman  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  kümesi  $X$ 'te yoğundur.

**b.**  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , bir kapalı ve içi boş kümeler ailesiyse (yani her  $F_n$  seyrekse),  $F_n$ 'lerin bileşiminin de içi boştur.

**c.**  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , bileşimi  $X$  olan bir kapalı kümeler ailesi olsun. O zaman  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^\circ$  bileşimi  $X$ 'te yoğundur.

**d.**  $X$ 'in boş olmayan her açık altkümeleri (dolayısıyla  $X$  de)  $X$ 'in ikinci kategoriden altkümeleridir, yani  $X$ 'in sayılabilir sayıda seyrek altkümelerinin bileşimi değildir.

**Kanıt:** (a  $\Rightarrow$  b).  $\text{cl } F_n^c = (F_n^\circ)^c = \emptyset^c = X$  olduğundan,  $F_n^c$  kümeleri açık ve yoğun kümelerdir. Dolayısıyla kesişimleri olan  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$  kümesi de yoğundur. Demek ki,

$$X = \text{cl} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c \right) = \text{cl} \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c \right) = \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^\circ \right)^c$$

ve  $\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^\circ = \emptyset$ .

(b  $\Rightarrow$  a). Yukardaki kanıtla benzerdir ve okura bırakılmıştır.

<sup>3</sup>İngilizcesi *meager*

# Kaynakça

- [Ap] Tom M. Apostol, **Calculus I ve II**, John Wiley and Sons 1967.
- [Be] Sterling K. Berberian, **A First Course in Real Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1994.
- [G] Roger Godement, **Analysis I ve II**, Springer, Universitext 2003. (Fransızcadan İngilizceye çeviren Philip Spain).
- [Ke] John L. Kelley, **General Topology**, Van Nostrand 1955. Sonraki basım Springer 1975.
- [MD] Matematik Dünyası dergisi, TMD, 2007-2011.
- [Mu] James R. Munkres, **Topology, a first course**, Prentice-Hall, Inc. 1975.
- [N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3'üncü basım, Nesin Yayıncılık 2011.
- [N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: <http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2>.
- [N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: <http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2>.
- [N4] Ali Nesin, **Temel Gerçel Analiz** (Analiz I, gerçel sayılar, diziler ve seriler), Nesin Yayıncılık 2011.
- [N5] Ali Nesin, **Analiz II** (süreklilik), Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: <http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2>.
- [N6] Ali Nesin, **Analiz III** (türev ve integral), Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak.
- [Sp] Murray R. Spiegel, **Théorie et Applications de l'Analyse**, Serie Schaum, McGraw-Hill 1974.
- [TT] Tosun Terzioğlu, **An Introduction to Real Analysis**, Matematik Vakfı 2000.

# Dizin

$\approx$ , 84

$A^\circ$ , 22, 31

$\bar{A}$ , 92

$A'$ , 96, 97

açık altküme, 18

açık aralık, 30

açık fonksiyon, 76, 81, 90

açık küme, 13

açık örtü, 68

açık top, 54

açık yuvar, 54, 129, 169

Alexander'ın öntaban teoremi, 213

Alexander'ın hilesi, 87

Alexandroff tek nokta tıkkızlaması, 232–235

altdizi, 153

altuzay (metrik), 122, 171

altuzay (topolojik), 64

$A^{(n)}$ , 97

Arzelà teoremi, 292

Arzelà ve Ascoli teoremleri, 287–295

asalların sonsuzluğu, 113

Ascoli teoremi, 293

ayrık metrik, 122, 165

ayrık nokta, 206

ayrık topoloji, 29, 37, 52, 59, 89

ayrılabilir uzay, 220

ayrıştırılabilir uzay, 220

bağlantı bileşenleri, 104

bağlantılı, 101

bağlantılılık, 101–112

Baire kategori teoremi, 251–261

Baire uzayı, 253–261

Baire, René-Louis, 251

$B(a, r)$ , 128, 129

$\bar{B}(a, r)$ , 56, 169

$B_d$ , 129

Beyarslan, Özlem, 1

birinci dereceden sayılabilir, 69

birinci kategoriden küme, 253

birinci sayılabilir, 179

Bolzano Teoremi, 109

Bolzano-Weierstrass teoremi, 293

Borel kümeleri, 114

$B_\infty$ , 166

büyük çember, 125

Cantor kümesi, 238

Cauchy, Augustin-Louis, 268

$C_b(X, Y)$ , 178

cebir, 267

cl, 93

$cl_X$ , 95

$C(S, T)$ , 75

$C(X, Y)$ , 277

çap, 127, 229

çarpım topolojisi, 71–82, 169

çarpım topolojisinde iç, 78, 99

çarpım topolojisinde kapanış, 99

çizgede metrik, 126

$\partial$ , 94, 251, 252

$d(x, y)$ , 118, 119

Demir, Selçuk, 1, 302

denk mesafeler, 166

Dini teoremi, 235

dizilerde ultrametrik, 136

dizisel sürekli fonksiyon, 45, 179

dizisel tıkkız uzay, 219

dizisel tıkkızlık, 219–223

Doğan, Uğur, 1, 251

$d_p$ , 121, 123, 143, 154, 166, 178

$d_\infty$ , 123, 130, 154, 166, 178

düzgün açık, 113

düzgün kapalı, 113

düzgün sürekli, 279

düzgün Cauchy dizisi, 276

düzgün metrik, 127, 156, 166, 167

düzgün sürekli, 230, 231

düzgün yakınsaklık metriği, 276

düzgün yakınsaklık topolojisi, 273

düzgün yakınsama, 145, 268–273

en kaba topoloji, 29, 36

en kısa yol, 126

Ercan, Zafer, 1, 182, 227

eşmetrik eşlemesi, 124

eşsürekli, 291

Fürstenberg, Hillel, 113

$F_\delta$ -kümesi, 97

Fonk, 75, 156

Fr, 94, 251

Fréchet topolojisi, 29, 37, 53, 57, 84, 89, 93, 102

Fréchet uzayı, 235

- $G_\delta$ -kümesi, 97, 260  
 Gudermann, Christoph, 268  
  
 halka, 267  
 Hausdorff uzay, 38–41, 81, 91, 298  
 Heine-Borel teoremi, 211, 293  
 homeomorfi, 83  
 homeomorfik uzaylar, 83  
 homeomorfizma, 83  
  
 Int, 67  
 iç, 31, 67  
 ikinci dereceden sayılabilir, 69  
 ikinci kategoriden küme, 253  
 ince topoloji, 29, 37  
 indirgenmiş metrik, 122  
 indirgenmiş topoloji, 30, 63–70  
 izdüşüm fonksiyonu, 73  
 izometri, 124  
  
 kaba topoloji, 29, 52  
 kapalı küme, 89, 204  
 kapalı yuvar, 92  
 kapanış, 92  
 kapanış operatörü, 93  
 karakteristik fonksiyon, 80  
 karşılıklı ayrışık kümeler, 103  
 kartezyen çarpım, 81, 82  
 kartezyen çarpımda metrik, 121, 123, 167  
 kartezyen çarpımın tamlığı, 154  
 Ker  $f$ , 91  
 kısıtlanmış topoloji, 64  
 komşuluk, 4, 46, 114  
 kompakt küme, 199  
 kopuk uzay, 101  
 Korkmaz, Aslı Can, 1  
 $K[[T]]$ , 194  
 Kuratowski kapama-tümleme problemi, 97  
 kutu topolojisi, 81, 114  
 kuvvet serileri halkası, 194  
 küme ailesi, 81  
  
 $\ell^\infty(X)$ , 281  
 $\ell^\infty(X, Y)$ , 127, 273–274  
 Lebesgue sayısı, 229, 230  
 limit, 98  
 limit (dizi), 36  
 limit noktası, 96, 217  
 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , 39  
 $\lim_{x \rightarrow a}$ , 98  
 Lipschitz sürekli, 293  
 ln, 232  
  
 Manhattan metriği, 122  
 merkez (yuvarın), 129  
 mesafe, 119, 125  
 mesafe (iki küme arası), 180  
 metrik, 119  
 metrik uzay, 119  
  
 metrik uzayların kartezyen çarpımı, 165  
 metrik uzayların tamlaması, 183–192  
 metrikleşen topoloji, 164  
 metrikleşmeyen topoloji, 164, 279  
 mutlak değer, 118  
 mükemmel küme, 240  
  
 nerdeyse bağlantılı bileşenler, 112  
 New York metriği, 122  
 noktaları ayırmak, 264  
 noktasal işlem, 267  
 noktasal limit, 265  
 noktasal yakınsaklık, 145, 265  
 normal topolojik uzay, 182, 297, 302  
  
 $\mathcal{O}$ , 137  
 $\omega$ , 218  
 $\omega_1$ , 40, 218, 219, 226, 228, 298  
 Öklid mesafesi, 121  
 Öklid metriği, 120, 121, 165  
 Öklid topolojisi, 28, 30, 37, 44, 52, 54, 55, 59  
 Öklid uzayı, 121, 156  
 öntaban, 52–61  
 örtü, 68  
 özdeşlik fonksiyonu, 44  
  
 $\mathcal{P}$ , 137  
 $\emptyset$ , 27, 80  
 $\wp(\mathbb{N})$ , 154  
 polinom halkasında ultrametrik, 136  
 $\wp^\omega(\mathbb{N})$ , 154  
 pr, 73  
 $p$ -sel metrik, 135–137, 148, 160, 171, 178, 192–194  
 $p$ -sel sayılar cismi, 194  
 $p$ -sel tamsayılar halkası, 192, 194  
  
 $\mathbb{Q}_p$ , 194  
  
 $\mathbb{R}$ 'nin açık altkümeleri (sınıflandırma), 23  
 $\mathbb{R}^\omega$ , 168  
  
 $S^1$ , 113  
 süreklilik (bir noktada), 3  
 sağdan süreklilik, 113  
 sayılabilir tıkız, 226  
 sayılabilir taban, 221, 222  
 seyrek altküme, 241, 248, 252  
 sıfırlanmaz küme, 284  
 sınır, 94, 113  
 sınırlı dizi, 158  
 sınırlı fonksiyon, 127  
 sınırlı küme, 158  
 sıra topolojisi, 213, 226  
 sıralama topolojisi, 218, 298  
 simit, 125  
 sınırlı küme, 127  
 SKÖ, 205  
 sonlu kesişim özelliği, 205  
 Sorgenfrey doğrusu, 40, 102

- Sorgenfrey yakınsaklık, 41  
 stereografik izdüşüm, 85, 87  
 Stone, Marshall H., 284  
 Stone-Weierstrass teoremi, 283–286  
 sürekli fonksiyon, 12, 43–46, 174  
 süreklilik (bir noktada), 173  
 Şahin, Çiğdem, 1
- $T_1$  uzayı, 40, 102, 235  
 $T_2$  uzayı, 38  
 taban, 56  
 tam metrik uzay, 153–159, 183  
 tamlama (metrik uzay), 183, 184  
 tecrit edilmiş nokta, 206  
 temel açık küme, 79  
 tıkız küme, 199  
 tıkız topolojik uzay, 197–235  
 tıkız-açık topoloji, 216, 279  
 tıkızlaştırmak, 233  
 Tietze genişleme teoremi, 302  
 top, 129  
 topoloji, 3  
 topolojik eşleme, 83  
 topolojik olarak denk uzaylar, 83  
 topolojik uzay, 28  
 torus, 125  
 Törün, Ali, 1  
 tümden sınırlılık, 224–226  
 tümden sınırlı, 224, 289  
 tümleyeni sayılabilir topoloji, 30, 38, 45  
 Tychonoff teoremi, 213–216  
 Tychonoff topolojisi, 79
- uç değerler teoremi, 212, 213  
 ultrametrik, 134–137, 148–150, 154, 160–162  
 Urysohn önsavı, 298–302  
 Ünlü, Yusuf, 1, 227  
 üretilen topoloji, 52, 57, 164  
 üstlimit topolojisi, 113
- val, 135  
 $val_p$ , 135, 160  
 vektör uzayı, 267
- Weierstrass yoğunluk teoremi, 284  
 Weierstrass, Karl, 268, 270
- $\chi$ , 80  
 $X$ -açık, 18  
 $X$ -kapanış, 95  
 $X$ -komşuluğu, 6
- yakınsamak (dizi), 36  
 yalancıkdan tıkız, 227  
 yarıçap (yuvarın), 129  
 yarıdüzlem, 60  
 yerel tıkız, 235, 258  
 yerel taban, 179  
 yığılma noktası, 96, 170, 217, 240
- yığılma nokyası, 97  
 yoğun, 95  
 yol, 126  
 yol uzunluğu, 126  
 yuvar, 129
- zamanla sabitleşen diziler, 36  
 zayıf altküme, 253  
 zengin topoloji, 37, 69  
 $\mathbb{Z}_p$ , 192, 194