Ali Nesin

Analiz IV

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Nesin Yayıncılık A.Ş.
İnönü Mahallesi Çimen Sokak No: 50/A Elmadağ Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Analiz IV

İlk basım Aralık 2011 (1000 adet)

Soyut Matematik 6
Analiz 4
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 13

004 01 02 002 - 157
ISBN 978-605-5794-81-1
Sertifika No: 18231

Editör
Ali Nesin

Grafik Danışmanı
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı
Aslı Can Korkmaz
Çiğdem Şahin

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
Çiftehavuzlar Cad. Prestij İş Merkezi No: 27/806 Zeytinburnu/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

İçindekiler

Önsöz

İstanbul Bilgi Üniversitesi'nin Matematik Bölümü'nde, içeriği aşağı yukarı bu kitap olan bir ders dördüncü dönem lisans öğrencilerine verilmektedir. Bunun için de ilk üç dönem aşağı yukarı ilk üç cildin içeriği okutulmaktadır. Öğrenciler zorlanıyorlar elbet, lise eğitimleri gözönüne alınca konu fazlaca soyut geliyor. Ama sebat edip çalışanlar gerçek birer matematikçi olarak mezun oluyorlar. Bu kitabın içeriğinin matematik bölümlerinin en geç üçüncü sınıfında okutulabileceğini, hatta okutulması gerektiğini düşünüyorum.

Alıştırmalar ve örnekler fazla yer kaplamasın, bu yüzden kitabın fiyatı artmasın diye küçük puntoyla yazdım. Ama bundan alıştırma ve örneklerin önemsiz oldukları anlamı çıkmamalı. Özellikle örnekleri metinde bol bol kullandım.

Ultrametriği ve p-sel sayıları metin boyunca sağa sola ve özellikle bölüm sonlarına serpiştirdim. Böylece okur hem somut olarak hesap yapabileceği bir örnek görmüş olacak hem de matematiğin en ilginç yapılarından biriyle haşır neşir olacak. Doğrusu içimden bu konuya daha fazla eğilmek geçti ama kendimi tuttum.

Bu arada Bölüm 0'ın önemsiz olmadığını, okunması ya da bilinmesi gerektiğini üstüne basa basa söyleyelim.

Selçuk Demir, Uğur Doğan, Zafer Ercan ve Yusuf Ünlü'nün kitaba çok önemli katkıları olmuştur. Uğur Doğan, Zafer Ercan ve Ali Törün kitabı satır satır okuyarak sayfalar dolusu hata buldular, çok değerli düzeltmeler ve iyileştirmeler yaptılar. Asistanlarım Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin Quark'ta yazılmış metni sabahlara kadar çalışarak LaTeX'e aktardılar ve bana büyük kolaylık sağladılar. Sonat Süer LaTeX konusunda çok yardımcı oldu. Katkısı olan herkese ve sabırda Eyüp Sultan'ı da aşan eşim Özlem Beyarslan'a teker teker ve tekrar tekrar teşekkürlerimi sunarım.

Hataları, eksikleri, fazlalıkları, ifade bozukluklarını, zor anlaşılan yerleri ve her türlü önerinizi anesin@bilgi.edu.tr adresine yollarsanız çok makbule geçer, gelecek basımlarda düzeltirim.

Ali Nesin, 18 Kasım 2011

0. $\mathbb{R}$ Örneği

Bu bölümde, bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekliliğinin tanımından ϵ ve δ sayılarını atıp yerlerine kümeler kuramını andıran tanımlar vereceğiz. Böylece analiz konusu gerçel sayılardan soyutlanıp, adına ***topoloji*** denilen çok daha genel bir konu haline gelecek. Yani bu bölümde topoloji kavramının nereden kaynaklandığını göstermeye çalışacağız. Topoloji konusuna gerçek anlamda Bölüm 1'de gireceğiz ve kitap esas olarak o zaman başlayacak.

0.1 Bir Noktada Süreklilik ve Komşuluk

0.1.1 Tartışma

Bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğinin tanımını anımsatmakla başlayalım. Basitleştirmek için, şimdilik, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir X altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonla değil de $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonla çalışalım, her şey daha kolay olacak.

$a \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. a'da sürekliliğin tanımı şöyledir [N5]:

A. *Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki, her $x \in \mathbb{R}$ için,*
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Bu tanımı değiştire değiştire bir başka biçimde yazacağız; buram buram kümeler kuramı kokan bir biçimde. Tanımdaki ϵ ve δ sayılarından ve eşitsizlik işaretlerinden kurtulacağız; bir bedel karşılığında elbette: Tanımdaki ϵ ve δ sayıları yerine $\mathbb{R}$'nin bazı özel altkümeleri yer alacak.

f'nin a'da sürekliliğini şöyle ifade edelim:

B. *Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki, her $x \in \mathbb{R}$ için,*
$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Ya da şöyle:

C. *Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki*
$$f(a - \delta, a + \delta) \subseteq (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Ya da şöyle:

D. *Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki*

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Demek ki, f fonksiyonunun a'da sürekli olması demek, $\epsilon > 0$ hangi sayı olursa olsun,

$$(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

aralığının önimgesinin, yani

$$f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

kümesinin $(a - \delta, a + \delta)$ biçiminde bir aralık içermesi demektir. İlk olarak, $(a - \delta, a + \delta)$ yerine I yazıp δ'dan kurtulalım:

E. *Her $\epsilon > 0$ için a'yı içeren öyle bir I açık aralığı var ki*

$$I \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

(D) koşuluyla (E) koşulunun eşdeğer oldukları daha önceki eşdeğerlikler kadar bariz değil, kanıtlayalım: Eğer (D) doğruysa, elbette (E) koşulu da doğrudur. Öte yandan, (E) koşulu doğruysa (D) koşulu da doğrudur. Nitekim eğer verilmiş $\epsilon > 0$ için,

$$I \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

içindeliğini sağlayan ve a'yı içeren açık bir I aralığı varsa, o zaman, belli bir $\delta > 0$ sayısı için

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq I$$

olur. Dolayısıyla

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq I \subseteq f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

olur, yani (D) koşulu doğrudur.

Sürekliliğin tanımıyla daha fazla oynayabilmek için bir tanıma gereksiniyoruz.

$\mathbb{R}$'nin, a'yı içeren açık bir aralığını içeren altkümelerine a'nın ***komşuluğu*** diyelim. Yani eğer $V \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi, açık bir I açık aralığı için,

$$a \in I \subseteq V$$

içindeliklerini sağlıyorsa, V'ye a'nın ***komşuluğu*** diyelim.

Tanımda V'nin I'ya eşit alınabileceğine dikkat edelim, yani a'yı içeren her I açık aralığı a'nın bir komşuluğudur. Demek ki her açık aralık, içerdiği her noktanın bir komşuluğudur.

Eğer V, a'nın bir komşuluğuysa ve $V \subseteq W$ ise, W de a'nın bir komşuluğudur elbette. Bu, birazdan gerekecek.

Komşuluğun tanımından dolayı (E) koşulu şu koşula denktir:

1. Topolojik Uzay

Geçen bölümde $\mathbb{R}$'nin, adına "açık" dediğimiz bazı altkümelerini tanımladık ve bir fonksiyonun sürekliliğini tamamen açık kümeler yardımıyla (hiç ϵ ve δ kullanmadan) ifade ettik. Böylece bir fonksiyonun sürekliliğini kümeler kuramı seviyesine indirdik. Aynı şeyi bugüne kadar analizde tanımladığımız hemen hemen her kavram için yapabiliriz. Böylece analitik kavramları fiziksel dünya olarak niteleyebileceğimiz $\mathbb{R}$'den kurtarıp, bu kavramları çok daha soyut ve genel bir evrene genelleştirebiliriz. Her ne kadar yapacaklarımız uç seviyede soyutsa da, kanıtları kolaylaştırdığından ve daha genel olduklarından çok daha fazla uygulamaya izin verir. Güzelliği de cabası.

1.1 Tanım ve Örnekler

Geçen bölümde, $\mathbb{R}$'nin bir X altkümesi için, X'in "açık altküme"lerini bir biçimde tanımlamış ve Önsav 0.16'da bu açık altkümelerin şu özellikleri sağladıklarını kanıtlamıştık:

X1. $\emptyset$ ve X kümeleri açıktır.
X2. İki açık kümenin kesişimi açıktır.
X3. Açık kümelerin bileşimi açıktır.

Şimdi, herhangi bir X kümesi verilmiş olsun. X'in yukardaki gibi $\mathbb{R}$'nin altkümesi olması filan gerekmiyor, herhangi bir küme olabilir. (Topolojinin güzelliği de işte tam burada.) X'in bazı altkümelerine "açık" adını verelim ve açık dediğimiz bu altkümelerin yukardaki X1, X2, X3 özelliklerini sağladıklarını varsayalım. O zaman X üzerinde bir "***topoloji***" tanımlanmış olur. Eğer τ, elemanları, adına açık adını verdiğimiz kümelerden oluşan kümeyse, (X, τ) çiftine ***topolojik uzay*** denir.

Tanımı daha matematiksel verelim. X herhangi bir küme olsun. X'in altkümelerinin kümesini $\wp(X)$ ile simgelediğimizi anımsatalım.

$$\tau \subseteq \wp(X)$$

olsun. Yani τ, elemanları X'in bazı altkümeleri olan bir küme olsun[1]. τ'nun

[1] τ, Yunan alfabesinin t harfidir ve "tau" diye okunur

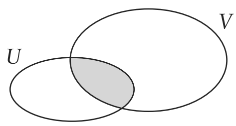
şu özellikleri sağladığını varsayalım:

T1. $\emptyset$, $X \in \tau$.

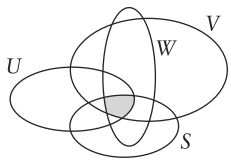
T2. Eğer U, $V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$.

T3. Eğer her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

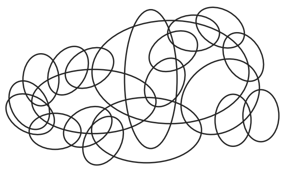
Çoğu zaman τ'nun ne olduğu konunun gelişinden bellidir; o zaman, (X, τ) çifti yerine sadece X'in kendisine ***topolojik uzay*** denir.



U ve *V* açıksa *U* ∩ *V* de açıktır.



Dolayısıyla, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.



Sonlu ya da sonsuz, kaç tane olursa olsun, açık kümelerin bileşimi hep açıktır.

T1, T2 ve T3 koşullarıyla X1, X2, X3 koşulları eşdeğerdir elbette. Bir X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlamak demek, X'in açık kümelerini bir biçimde belirlemek demektir. Açık adı verilen bu kümeler X1, X2, X3 özelliklerini sağlamalıdırlar.

Bir önceki bölümde $\mathbb{R}$ üzerinde tanımladığımız topolojiye ***Öklid topolojisi*** adı verilir. O topolojide, açık kümeler açık aralıkların bileşimi olarak tanımlanmıştı. $\mathbb{R}$ üzerinde ya da herhangi bir X kümesi üzerinde çok farklı topolojiler tanımlayabiliriz. Birazdan birçok farklı örnek sunacağız.

İki açık kümenin kesişimi açık olduğundan, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır. Bu, açık küme sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. Ama sonsuz sayıda açık kümenin kesişimi açık olmayabilir, örneğin, Öklid topolojisinde

$$\bigcap_{\epsilon > 0} (-\epsilon, \epsilon) = \{0\}$$

olur ve tek elemanlı kümeler bu topolojide açık değillerdir (elbette).

Aşağıdaki önsav basit ama son derece kullanışlıdır.

Önsav 1.1. *X bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y'nin açık olması için her $y \in Y$ için, $y \in U_y \subseteq Y$ içindeliklerini sağlayan açık bir U_y altkümesi olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Eğer U açıksa her $y \in U$ için $U_y = U$ almak yeterli. Diğer istikamet: $U = \bigcup_{y \in Y} U_y$ olduğundan, U açıktır. □

Eğer τ_1 ve τ_2, X üzerine birer topolojiyse ve $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise, τ_1'e τ_2'den daha **kaba**, τ_2'ye τ_1'den daha **ince** topoloji adı verilir.

Şimdi topolojik uzay örneklerine geçelim. Örneklerin çeşitliliği konunun zenginliğine delalettir. Aşağıdaki örneklerde X herhangi bir küme olabilir.

Örnekler

1.1. X herhangi bir küme ve $\tau = \{\emptyset, X\}$ olsun. Bu, kolayca görüleceği üzere X üzerinde bir topolojidir. Pek fazla açık kümesi olmadığından, hatta T1'den dolayı olabilecek en az sayıda açık kümesi olan bu topolojiye ***en kaba topoloji*** (yani X'in en kaba topolojisi) adı verilir. Eğer X boşkümeyse ya da tek bir elemanı varsa, o zaman X üzerinde bu topolojiden başka topoloji yoktur.

1.2. En kaba topolojiyle zıt konumda olan ve adına ***ayrık topoloji*** denen bir de en ince ya da en zengin topoloji vardır. Bu topolojide X'in her altkümesinin açık olduğuna hükmedilir, yani τ kümesi $\wp(X)$ kümesine eşittir. $\wp(X)$'in T1, T2 ve T3 özelliklerini sağladığı çok belli.

1.3. X'in tümleyeni sonlu olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de ayrıca boşkümeye açık diyelim. O zaman X üzerinde bir topoloji tanımlamış oluruz. Eğer X sonluysa, bu topoloji aynen bir önceki paragrafta tanımlanan en ince topolojidir. Ama eğer X sonsuzsa (mesela $X = \mathbb{Z}$ ya da $\mathbb{R}$ ise), o zaman bambaşka ve oldukça ilginç bir topoloji elde ederiz. Bu topolojiye ***Fréchet topolojisi*** ("freşe" okunur) adı verilir.

1.4. A, X'in herhangi bir altkümesi olsun. $\tau = \{\emptyset, A, X\}$ olsun. Bu da X üzerinde topolojik bir yapı belirler. En fazla üç açık kümesi olduğundan, oldukça fakir bir topoloji olduğunu söyleyebiliriz. Bu topoloji, ayrıca A kümesinin açık olduğu en küçük topolojidir.

1.5. A ve B, X'in herhangi iki altkümesi olsun. $\tau = \{\emptyset, A, B, A \cap B, A \cup B, X\}$ olsun. Bu da X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji A ve B kümelerinin açık olduğu en küçük topolojidir.

1.6. A, B ve C, X'in herhangi üç altkümesi olsun. Bu altkümelerin açık olduğu en küçük topolojiyi bulalım. Biraz daha zorlanacağız. τ, tabii ki X'in

$$\emptyset, A, B, C \text{ ve } X$$

altkümelerini içermeli, yani bu kümeler tanımlayacağımız topolojide açık olmalı. Ama, topolojimiz, A, B, C altkümelerinin

$$A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$$

kesişimlerini de içermeli, çünkü ne de olsa sonlu sayıda açık kümenin kesişimi gene açık olmalı. Topolojimiz bu altkümeleri içerdiği gibi şimdiye kadar bulduğumuz açık kümelerin bileşimlerini de içermeli, yani,

$$\begin{array}{l} A \cup B,\ B \cup C,\ C \cup A, \\ A \cup (B \cap C),\ B \cup (C \cap A),\ C \cup (A \cap B), \\ (A \cap B) \cup (B \cap C),\ (B \cap C) \cup (C \cap A),\ (C \cap A) \cup (A \cap B), \\ (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{array}$$

altkümelerini de içermeli. Yanlış saymadıysak toplam 19 küme etti. Bu kadarı yetiyor. Yukardaki 19 küme X üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojinin X'in A, B ve C altkümelerinin açık olduğu en küçük topoloji olduğu besbelli.

1.7. A, X'in herhangi bir altkümesi olsun. $\tau = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. τ, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide, boşküme dışında, A ve A'yı içeren altkümeler açıktır, diğerleri değildir. $\tau = \{U \subseteq X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$ aynı X kümesi üzerine bir başka topolojidir.

1.8. $(X, \leq)$ bir sıralama olsun [N3]. Yani $\leq$ ikili ilişkisi her $x, y, z \in X$ için, şu özellikleri sağlasın:

$$x \leq x,$$
$$x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y,$$
$$x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z.$$

Örneğin $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve sıralama bildiğimiz, ilkokuldan beri aşina olduğumuz sıralama olabilir, ya da X bir ordinal ya da kardinal olabilir. $a, b \in X$ için,

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in X : a < x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$$

tanımlarını yapalım. (Burada $x < y$, "$x \leq y$ ve $x \neq y$ anlamına gelmektedir.) Bunlara ***açık aralık*** diyelim. Açık aralıkların bileşimi olarak yazılan kümelere de "açık küme" diyelim. Böylece X üzerinde bir topoloji tanımlanmış olur. Bu topolojiye $\leq$ sıralaması tarafından üretilmiş ***sıralama topolojisi*** denir. $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisiyle bilinen sıralamasıyla üretilen sıralama topolojisi aynı topolojidir.

1.9. (Tümleyeni sayılabilir topoloji) X herhangi bir küme olsun. (Ama X'i $\mathbb{R}$ gibi sayılamaz sonsuzlukta bir küme alırsak daha iyi ederiz, yoksa ilginç bir örnek elde etmeyiz.) X'in, tümleyeni sayılabilir sonsuzlukta olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de tabii boşküme açık olsun. O zaman X üzerinde bir topoloji tanımlamış oluruz ve bu topoloji Örnek 1.3'te tanımlanan Fréchet topolojisinden daha incedir, yani Fréchet topolojisinde açık olan her küme bu topolojide de açıktır.. Bu topolojide sayılabilir sonsuzluktaki açık kümenin kesişimi gene açıktır. Bu topolojiyi elbette başka kardinalitelere de genelleştirebiliriz.

1.10. (İndirgenmiş Topoloji) X bir topolojik uzay olsun. $Y \subseteq X$ bir altküme olsun. Y üzerine şöyle bir topoloji tanımlayalım: $V \subseteq Y$ "açık"tır ancak ve ancak X'in açık bir U kümesi için $V = Y \cap X$ oluyorsa. Yani Y'nin açık kümeleri X'in açık kümeleriyle Y'nin kesişimi olsun. Bunun gerçekten bir topoloji tanımladığını ilerde göreceğiz (Bölüm 5) ama okur şimdiden bu tanımın Y üzerine bir topoloji yarattığını kanıtlamalıdır. Eğer $X = \mathbb{R}$ Öklid topolojisiyle donatılmışsa ve $Y \subseteq \mathbb{R}$ ise, Y üzerine böylece elde edilen topolojiye de ***Öklid topolojisi*** diyeceğiz.

1.11. Eğer X bir topolojik uzaysa ve f fonksiyonu X ile bir Y kümesi arasında bir eşlemeyse, o zaman X'in topolojisini f eşlemesini kullanarak Y'ye taşıyabiliriz. Örneğin $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ ve $x \neq 0, 1$ için $f(x) = x$ olarak tanımlanmışsa, bu yöntemle $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisi $\mathbb{R}$'nin bir başka topolojisine dönüşür. Bu yeni topolojide $(-1, 0) \cup (0, 1]$ kümesi ($(-1, 1)$ açık aralığının f altında imgesi olduğundan) açıktır. Ve mesela $(1/n)_n$ dizisi bu topolojide 0'a değil 1'e yakınsar. (Topolojik uzaylarda limit kavramını daha sonra göreceğiz.)

Alıştırmalar

1.1. X bir küme olsun. X üzerinde bir topolojinin en ince topoloji olması için, X'in tek elemanlı altkümelerinin açık olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

1.2. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $[x, \infty)$ aralığının $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde açık olmadığını kanıtlayın.

1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $X \subseteq Y$ olsun. $\tau \cup \{Y\}$ kümesinin Y üzerinde bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.

1.4. İki elemanlı bir küme üzerinde kaç değişik topoloji vardır? Aynı soruyu üç elemanlı bir

10. Metrik Uzaylar

10.1 Tanım

Bu cildin ilk iki bölümünde $\mathbb{R}$'de analiz konusunu işledikten sonra topolojiye eğilmiştik. Ama daha önceki ciltlerde hep $\mathbb{R}$'de çalışmıştık, hiç $\mathbb{R}$'nin dışına çıkmamıştık. Şimdi $\mathbb{R}$'ye geri dönüp $\mathbb{R}$'de tanımladığımız yakınsaklık, süreklilik gibi kavramların tanımlarına bir kez daha göz atalım. Daha sonra topolojiye geri döneceğiz.

Bir $(x_n)_n$ gerçel sayılar dizisinin bir a gerçel sayısına yakınsaması demek, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir N sayısının var olması demektir.

Süreklilik için ise şu tanımı vermiştik: Bir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun bir a sayısında sürekli olması demek, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir $\delta > 0$ sayısının var olması demektir.

Her iki tanımda da kullanılan,

$$|x - y|$$

mutlak değer fonksiyonuna odaklanalım.

Tanımlarda mutlak değerden sözedildiğine göre, yakınsaklığa, limite, sürekliliğe dair teoremlerimizin kanıtlarında zorunlu olarak mutlak değer fonksiyonunu kullandık.

"Mutlak değer fonksiyonunu kullanmak" ne demektir? Matematikte, hiçbir zaman bir nesnenin kendisi ("nesnenin kendisi" her ne demekse!) kullanılmaz. Sadece o nesnenin bazı özellikleri kullanılır.

Botanikte elmanın kendisi, kimyada alkolün kendisi, biyolojide balığın kendisi kullanılabilir ama tamamıyla zihinsel bir uğraş olan matematikte bir nesnenin kendisi değil, nesnenin bazı özellikleri kullanılır. (Nesnenin kendisi kaybolup sadece özellikleri kaldığında, geriye kalana "kavram" adı verilir.)

Nitekim bir bilim dalı ne kadar çok nesneden uzaklaşırsa, o kadar kavramsal olur; bir de simgeleşmeye başladığında o zaman o bilim dalı matematiksel olmaya başlar.

Matematiksel bir kanıt sonlu sayıda sözcükten oluşur ve sonlu sayıda sözcükle matematiksel bir nesnenin ancak sonlu sayıda özelliği sayılabilir. Örneğin eşitsizlik üzerine bir sonucun kanıtında, eşitsizliğin anlamı ya da kendisi değil, eşitsizliğin,

$$\begin{aligned}
&x \leq x,\\
&x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y,\\
&x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z,\\
&\text{ya } x \leq y \text{ ya da } y \leq x,\\
&0 \leq x^2
\end{aligned}$$

gibi sonlu sayıda özelliği kullanılmıştır. Eşitsizliklerle ilgili bir teoremin kanıtında sadece yukardaki özellikler kullanılmışsa, o zaman o teorem, adı eşitsizlik olsun ya da olmasın, bu özellikleri sağlayan tüm ilişkiler için geçerlidir. Dolayısıyla, matematiksel bir teorem, kanıtında söz edilen sonlu sayıda özellikleri sağlayan **tüm** matematiksel nesneler için kanıtlanmıştır.

Bu derin sözlerden sonra, yeryüzüne inip bugüne kadar matematik hayatımızda mutlak değerin hangi özelliklerini kullandığımız sorusunu soralım.

Her şeyden önce, mutlak değer adı verilen şey, bir fonksiyondur, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinden $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden bir fonksiyondur. Bu basit olgu dışında, önceki sayılarımızda mutlak değer fonksiyonu hakkında, her x, y, $z \in \mathbb{R}$ için geçerli olan şu üç özelliği kullandık:

1. $|x - y|$ sayısı ancak ve ancak $x = y$ ise 0 olur (yoksa mutlak değer pozitiftir). Biçimsel yazılımla

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2. $|x - y| = |y - x|$.
3. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Şimdi $|x - y|$ yerine $d(x, y)$ yazalım. Ne farkedecek ki! O zaman yukardaki özellikler şu hale dönüşürler:

1. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ ise.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Gerçel sayılarda analize dair tanımladığımız her kavramı ve kanıtladığımız hemen hemen her sonucu $|x - y|$ yerine $d(x, y)$ yazarak kanıtlayabilirdik (elbette!)

14. Metrik Uzaylarda Süreklilik

14.1 Süreklilik

Geçen bölümde her metriğin, tanımlandığı metrik uzay üzerine doğal olarak bir topoloji ürettiğini gördük. Anımsarsanız, topoloji, metriğin yuvarları tarafından üretilmişti. Aynı bölümde metrik uzaylardaki dizi yakınsaklığı kavramıyla topolojik uzaylardaki dizi yakınsaklığı kavramının örtüştüğünü gördük, aralarında bir fark yoktu. Bu bölümde, metrik uzayda "fonksiyonların sürekliliği" kavramlarını tanımlayıp, bu kavramın topolojik uzaylar için önceki kısımda tanımladığımız kavramlarla örtüştüğünü göreceğiz.

(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca $a \in X$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman f fonksiyonuna a'da ***sürekli*** denir.

Yukardaki koşulun,

$$x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon)$$

koşuluna eşdeğer olduğuna dikkatinizi çekeriz. Bu da, elbette

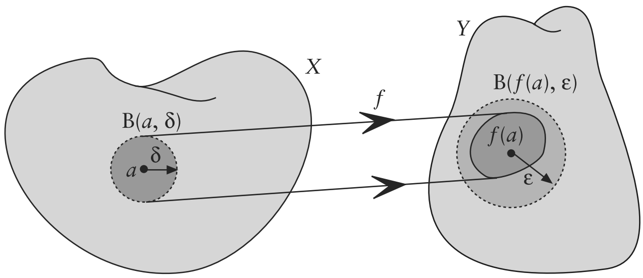
$$f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$$

demektir, ve bu son koşul da

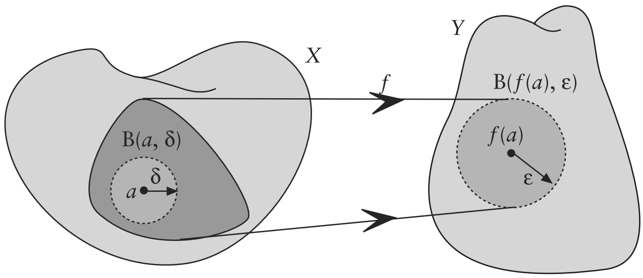
$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

koşuluna denktir. Böylece bir çırpıda bir noktada sürekliliğin dört değişik tanımını bulduk.

f, a'da sürekliyse
$\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,



$x \in B(a, \delta)$ ise $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ olur,
yani $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ olur ya da...



$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ olur.

Bu, tek bir noktada sürekliliğin tanımı. Her noktada sürekli olan bir fonksiyona kısaca ***sürekli fonksiyon*** denir.

Her izometri süreklidir elbette, ne de olsa izometriler için δ'yı ϵ'a eşit almak yeterlidir.

Topolojik uzaylarda da fonksiyonların sürekliliğinin tanımını görmüştük. Her metrik uzay bir topolojik uzay ürettiğinden, her iki sürekliliğin de aynı anlama gelip gelmediği sorusunu sorabiliriz. Yanıt olumludur, olması gerektiği üzere...

Teorem 14.1. *(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin metrik uzaylar anlamında sürekli olmasıyla, metriklerin ürettiği topolojik uzaylar anlamında sürekli olması arasında bir fark yoktur, iki kavram örtüşür.*

Kanıt: Önce f'nin metrik uzaylar anlamında sürekli olduğunu varsayalım. $V \subseteq Y$, Y'nin bir açık kümesi olsun. $f^{-1}(V)$'nin açık olduğunu kanıtlayacağız. Bu amaçla $f^{-1}(V)$'den herhangi bir a elemanı alalım. a merkezli ve 0'dan büyük yarıçaplı bir yuvarın $f^{-1}(V)$'nin altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Böylece $f^{-1}(V)$ kümesinin Y'de açık olduğu kanıtlanmış olacak.

$f(a) \in V$ olduğundan ve V açık olduğundan, topolojinin tanımına göre, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki, $B(f(a), \epsilon) \subseteq V$ olur. Fonksiyon her yerde olduğu gibi a'da da sürekli. Demek ki öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur.

Şimdi de f'nin topolojik anlamda sürekli olduğunu varsayalım. X'ten herhangi bir a elemanı alalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir eleman olsun. $B(f(a), \epsilon)$ açık bir küme olduğundan ve f sürekli olduğundan,

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

kümesi X'in açık bir altkümesidir. Bu açık küme a'yı içerdiğinden, a merkezli ve 0'dan büyük yarıçaplı bir yuvar içerir. Demek ki bir $\delta > 0$ için,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

olur, ki bu da f'nin a'da sürekliliği demektir. □

Benzer bir teoremi tek bir noktada süreklilik için de kanıtlayabiliriz.

Teorem 14.2. *(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $a \in X$ olsun. f'nin metrik uzaylar anlamında a'da sürekli olmasıyla, metriklerin gerdiği topolojik uzaylar anlamında a'da sürekli olması arasında bir fark yoktur, her iki kavram örtüşür.*

Kanıt: Önce f'nin metrik uzaylar anlamında a'da sürekli olduğunu varsayalım. $f(a) \in V \subseteq Y$, $f(a)$'nın Y'de bir komşuluğu olsun. $f^{-1}(V)$'nin a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlamalıyız. Komşuluğun tanımı gereği,

$$f(a) \in V' \subseteq V$$

ilişkilerini sağlayan bir V' açık kümesi vardır. Topolojinin tanımı gereği, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki,

$$f(a) \in B(f(a), \epsilon) \subseteq V' \subseteq V$$

ilişkileri sağlanır. f metrik uzaylar anlamında sürekli olduğundan,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. O zaman,

$$a \in B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur ki bu da $f^{-1}(V)$'nin a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlar.

Şimdi f'nin topolojik anlamda a'da sürekli olduğunu varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. $B(f(a), \epsilon)$ yuvarı, açık bir küme olduğundan $f(a)$'nın bir komşuluğudur.

16. Tıkız Topolojik Uzaylar

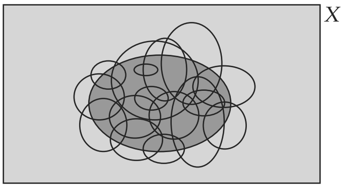
Bölümün uzunluğundan da anlaşılacağı üzere, bir topolojik uzayın tıkız altkümeleri çok önemlidir. (Bu giriş yazısı daha ilginç bir cümleyle başlayabilirdi ama ne yapalım ki bu dediğimiz çok doğru! Topologların azımsanamayacak bir bölümü yıllarını topolojik uzayların tıkız altkümelerini bulmaya ya da betimlemeye harcarlar.) Çünkü birazdan tanımlayacağımız tıkız altkümeler - çoğu zaman sonsuz olmalarına karşın - birçok anlamda sonlu altkümelerin oynadığı rolü oynarlar. Analiz de büyük ölçüde tıkız kümeler, bu da olmadı yerel tıkız topolojik uzaylar üzerinde yapılır. Tıkız kümeler sadece matematikte değil, (en azından diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığında oynadıkları rolden dolayı) fizikte de çok önemlidir. Ayrıca topolojiyi anlayıp anlamadığınızı bu bölümdeki teoremlerin hepsini kendi kendinize hiç yardım görmeden kanıtlayıp kanıtlayamadığınıza göre sınayabilirsiniz.

16.1 Örtü

Bir tanımla başlayalım. X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A'nın bir ***örtüsü***,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

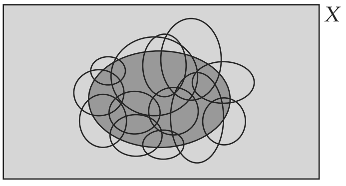
içindeliğini sağlayan, X'in U_i altkümelerinden oluşan bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ailesidir. Temsili resim aşağıda.



A koyu gri alan, U_i'ler küçük oval alanlar.

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ailesi, $\bigcup_{i \in I} U_i$ bileşiminin her altkümesinin bir örtüsüdür elbette. Her ne kadar bir $\mathcal{U}$ ancak bir kümenin örtüsü olabiliyorsa, yani kendi başına bir örtü olması anlamsızsa da biz sık sık kümenin bilindiğini varsayıp $\mathcal{U}$ örtüsünden sözedeceğiz.

Eğer $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün her U_i kümesi açıksa, o zaman $(U_i)_{i\in I}$ örtüsüne ***açık örtü*** denir.



Yukardaki $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün bir altörtüsü
(Yukardaki U_i'lerden üçü eksik.)

Eğer bir $J \subseteq I$ altkümesi için $\mathcal{V} = (U_j)_{j\in j}$ ailesi de A'nın bir örtüsü oluyorsa, o zaman $\mathcal{V}$ örtüsüne $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***altörtüsü*** denir.

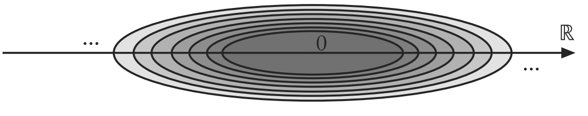
Eğer I göstergeç kümesi sonluysa A'nın $(U_i)_{i\in I}$ örtüsüne ***sonlu örtü*** adı verilir. "Sonlu altörtü" deyiminin ne demek olduğu belli olmalı: Altörtü tanımındaki J sonluysa, A'nın $\mathcal{V} = (U_j)_{j\in J}$ örtüsüne $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***sonlu altörtüsü*** adı verilir.

$(U_i)_{i\in I}$, A'nın bir örtüsüyse ve $B \subseteq A$ ise $(U_i)_{i\in I}$, B'nin de bir örtüsüdür. Elbette. Ve eğer $A \subseteq B$ ise $(U_i \cap B)_{i\in I}$ de B'nin bir örtüsüdür. Bu da elbette.

Birkaç basit örnek verelim.

Örnekler

16.1. $((-n, n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$'nin, aralıklardan oluşan bir açık örtüsüdür. Eğer bu örtüden sonlu sayıda aralık atarsak gene $\mathbb{R}$'nin bir örtüsünü (dolayısıyla orijinal örtünün bir altörtüsünü) elde ederiz. $((-n, n))_{n\in 2\mathbb{N}}$ de bu örtünün bir altörtüsüdür.

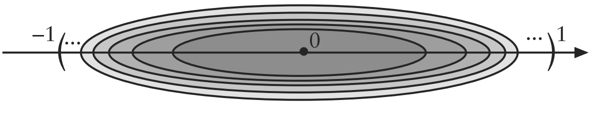


Daha genel olarak, eğer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sınırlı olmayan bir fonksiyonsa, $((-f(n), f(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ de bu örtünün bir altörtüsüdür. Bu ailenin sonlu bir altörtüsü yoktur.

16.2. $((-1 + 1/n, 1 - 1/n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ailesi $(-1, 1)$ açık aralığının açık bir örtüsüdür:

$$(-1,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (-1+1/n, 1-1/n).$$

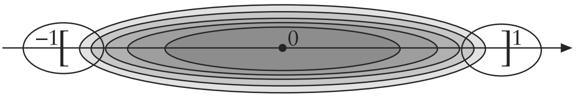
(Aslında eşitlik geçerli.) Bu aileden sonlu sayıda aralık silersek, gene $(-1, 1)$ aralığının bir örtüsünü elde ederiz, yani orijinal örtünün bir altörtüsünü buluruz. Bu ailenin sonlu bir altörtüsü yoktur.



16.3. $((-1+1/n, 1-1/n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ailesi $[-1,1]$ kapalı aralığının bir örtüsü değildir (bkz. aşağıdaki şekil), çünkü örtü 1 ve -1 elemanlarını örtmez, ama bu örtüye $(-8/7, -7/8)$ ve $7/8, 8/7)$ aralıklarını eklersek $[-1,1]$ kapalı aralığının açık bir örtüsünü elde ederiz.

$$(-8/7, -7/8), (-8/9, 8/9), (7/8, 8/7)$$

aralıkları yukardaki örtünün sonlu bir altörtüsüdür.



Örnek 16.1 ve 16.2'yle Örnek 16.3 arasındaki ayrımı gözler önüne serelim: Örnek 16.1 ve 16.2'deki örtülerin sonlu altörtüleri yoktur, ama Örnek 16.3'teki örtünün vardır. Örnek 16.1'deki $\mathbb{R}$ ve Örnek 16.2'deki $(-1,1)$ açık aralığı "tıkız" değildir ama Örnek 16.3'teki $[-1,1]$ kapalı aralığı "tıkız"dır. Tıkız kümenin matematiksel tanımı hemen şimdi geliyor.

Alıştırmalar

16.1. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ ailesi Y'nin bir örtüsüyse, $\mathcal{U} = (f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ ailesinin X'in bir örtüsü olduğunu kanıtlayın. Eğer f sürekliyse ve $\mathcal{V}$, Y'nin bir açık örtüsüyse, $\mathcal{U}$'nun X'in bir açık örtüsü olduğunu kanıtlayın.

16.2. Kesirli sayıları pozitif doğal sayılarla numaralandırıp $(q_n)_n$ biçiminde bir dizi elde edelim. $(B(q_n, 1/2^n))_n$ ailesinin $\mathbb{R}$'yi örtmediğini kanıtlayın.

16.3. $(q_n)_n$ yukardaki alıştırmadaki gibi olsun. $(B(q_n, 1/n))_n$ ailesi $\mathbb{R}$'yi örter mi?

16.2 Tıkız Küme

X bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. Eğer K'nın **her** açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa K'ya ***tıkız*** küme denir. (Tıkışık ya da kompakt dendiği de olur.) Yani K'nın tıkız olması için,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan X'in **her** $U_i \subseteq X$ açık altkümeleri için,

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır.

Yukardaki tanımdaki "her" sözcüğünün altını çizeriz; tanımın kilit sözcüğüdür. Bulunan sonlu örtü de orijinal örtünün **altörtüsü** olmak zorundadır...

Bazı yazarlar, örneğin Bourbaki ve Fransız ekolü tıkızlığı sadece Hausdorff uzaylar için tanımlarlar. Biz daha genel olan akıma uyup öyle yapmayacağız.

Eğer X topolojik uzayında X kümesi tıkızsa, X'e **tıkız topolojik uzay** denir. Önsav 16.1 bu tanımdan rahatsızlık duyanları yatıştıracaktır.

Hemen birkaç örnek ve karşıörnek verelim.

Örnekler

16.4. Her topolojik uzayın her sonlu altkümesi (dolayısıyla boşküme de) tıkızdır. Elbette!

16.5. Eğer X kümesi ayrık metrikle donatılmışsa, o zaman bu topolojik uzayın sadece sonlu altkümeleri tıkız olabilirler. Nitekim her A altkümesi için $(\{a\})_{a\in A}$ ailesi A'nın açık bir örtüsüdür.

16.6. Sadece sonlu sayıda açık kümesi olan bir topolojik uzayın her altkümesi tıkızdır. Örneğin en kaba topolojiyle donatılmış her küme tıkızdır.

16.7. Örnek 16.2'den $(-1, 1)$ açık aralığının (Öklid topolojisinde) tıkız olmadığı anlaşılıyor. Bu örnekten yola çıkarak, boş olmayan açık bir aralığın Öklid topolojisinde tıkız olmadığı kolaylıkla anlaşılır. Örnek 16.1'den de $\mathbb{R}$'nin (Öklid topolojisiyle) tıkız olmadığı anlaşılıyor.

Çok daha önemli örnekler ileride verilecektir. Örneğin $\mathbb{R}$'nin tüm tıkız altkümelerini kolay bir biçimde betimleyeceğiz (ama hayat her zaman $\mathbb{R}$'de olduğu kadar basit değildir) ve ilerde tıkız kümelerden başka tıkız kümeler yaratmanın çeşitli reçetelerini göreceğiz.

Sezgi kazandırması açısından $\mathbb{R}$'nin tıkız altkümelerinin neler olduğunu kanıtlamadan söyleyelim: $\mathbb{R}$'nin tıkız altkümeleri aynen $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı altkümeleridir. Bu, meşhur Heine-Borel teoremidir ve bu bölümde kanıtlanacaktır. Belki bu olgu "tıkız"ın menşeine dair bir bilgi verir: Tıkız altkümeler uzayıp gitmeyen, kendi içine kapalı altkümeler olarak algılanmalıdır. Tabii bu sadece bir algı olarak kalmalı, matematiksel bir olgu yatmıyor bu dediğimizin temelinde.

Okur $[0, 1)$ aralığının tıkız olmadığını kanıtlayabilir. Sorunun 1'de olduğu hissediliyordur umarım. İlerde $[0, 1]$ kapalı aralığının tıkız olduğunu göreceğiz. Demek ki tıkızlık tek bir nokta çıkarılınca bozulabiliyor, yani oldukça narin bir kavram.

Altbölüm 18.3'te, herhangi bir X topolojik uzayına tek bir nokta ekleyerek ve elde edilen kümeyi münasip bir topolojiyle donatarak (ama X'in topolojisine dokunmayarak), nokta eklenmiş kümeyi tıkız bir topolojik uzaya dönüştürebileceğimizi göreceğiz.

Alıştırmalar

16.4. X bir küme olsun. X üzerine τ_1 ve τ_2 topolojilerini alalım. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olsun. X'in bir altkümesi τ_2 için tıkızsa τ_1 için de tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.5. $\mathbb{R}$'nin sınırsız bir altkümesinin (Öklid topolojisinde) tıkız olamayacağını kanıtlayın. Genel olarak, tıkız bir metrik uzayın sınırlı olduğunu kanıtlayın.

16.6. $[0, 1)$ aralığının (Öklid topolojisinde elbet) tıkız olmadığını kanıtlayın.

16.7. Sonlu sayıda tıkız kümenin bileşiminin de tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.8. $[0, 1]$ aralığının tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.9. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tıkız mıdır?

16.10. $\mathbb{Q}$'nün bir altkümesinin ancak sonluysa tıkız olabileceğini kanıtlayın.

16.11. $\mathbb{Z}$'yi p'sel metrikle donatırsak tıkız bir metrik uzay elde eder miyiz?

16.12. Tıkız bir kümenin kapalı altkümelerinin de tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.13. Tıkız bir kümenin her altkümesi tıkız olmak zoruda mıdır?

20. Baire Kategori Teoremi

Baire Kategori Teoremi, fonksiyonel analiz ve topolojide önemli bir yere sahiptir. 1899'da René-Louis Baire tarafından doktora tezinde sunulmuştur. Fonksiyonel analizde Açık Fonksiyon Teoremi, Kapalı Grafik Teoremi ve Düzgün Sınırlılık Teoremi genelde bu teoremin yardımıyla kanıtlanır. Topolojide ise yoğun altkümeler hakkında önemli bilgiler sağlar[1].

20.1 Biraz Temel Topoloji

Eğer X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ ise, $\mathrm{cl}_X(A)$ ya da $\overline{A}$ yazılımı A'nın kapanışını, $\mathrm{int}_X(A)$ ya da A° yazılımı ise A'nın içini simgelesin. A^c, her zamanki gibi A'nın X'teki tümleyenini simgeliyor. $\mathrm{cl}\, A^c$, A^c'nin kapanışı anlamına gelecek.

$$(A^\circ)^c = \mathrm{cl}\, A^c \text{ ve } (A^c)^\circ = (\mathrm{cl}\, A)^c$$

eşitlikleri Önsav 8.5'te kanıtlanmıştı. Bu eşitlikleri sık sık referans vermeden kullanacağız.

A'nın sınırı olan $\mathrm{Fr}\, A$ ya da ∂A kümesi

$$\mathrm{Fr}\, A = \partial A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\, A^c$$

olarak tanımlanır. ∂A, iki kapalı kümenin kesişimi olduğundan elbette kapalı bir kümedir.

$$\overline{A} = A \cup \partial A,$$
$$A^\circ = A \setminus \partial A$$

eşitlikleri Alıştırma 8.22.i ve ii olarak sorulmuştu.

Önsav 20.1. *Eğer F bir topolojik uzayın kapalı bir altkümesiyse, $(\partial F)^c$ yoğun ve açık bir altkümedir.*

Kanıt: $(\partial F)^\circ = (\mathrm{cl}\, F \cap \mathrm{cl}\, F^c)^\circ = (F \cap \mathrm{cl}\, F^c)^\circ \stackrel{1.2}{=} F^\circ \cap (\mathrm{cl}\, F^c)^\circ = F^\circ \cap ((F^\circ)^c)^\circ \subseteq F^\circ \cap (F^\circ)^c = \emptyset$ olduğundan, $\mathrm{cl}((\partial F)^c) = ((\partial F)^\circ)^c = \emptyset^c = X$ olur. Açıklık ise bariz. □

[1] Bu bölüm Uğur Doğan ile birlikte yazılmıştır.

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A'nın kapanışının iç noktası yoksa, yani $(\operatorname{cl} A)^\circ = \emptyset$ ise, A'ya X'in ***seyrek***[2] altkümesi denir.

A seyrekse, A'nın kapanışı da, kapanışının altkümeleri de seyrektir. Eğer X boşküme değilse, X'in yoğun altkümeleri seyrek olamazlar. Kaba ve en ince topolojilerde sadece boşküme seyrektir.

Önsav 20.2. *Y bir topolojik uzay ve $A \subset X \subset Y$ olsun. Eğer A, X'te seyrekse Y'de de seyrektir.*

Kanıt: A yerine daha büyük bir küme olan $\operatorname{cl}_X(A)$ kümesini alıp A'nın X'te kapalı olduğunu varsayabiliriz. $B = \operatorname{cl}_Y(A)$ olsun. $\operatorname{Int}_Y(B) = \emptyset$ eşitliğini göstermek istiyoruz. Önsav 8.7'ye göre $A = B \cap X$ olur. Y'nin açık bir U altkümesi için $U \subseteq B$ olsun. U'nun boşküme olduğunu göstereceğiz. $U \cap X$, X'te açık olduğundan ve A'nın bir altkümesi olduğundan, $U \cap X = \emptyset$ olmalı. Demek ki $A \subseteq B \setminus U$. Ama B kapalı ve U açık olduğundan $B \setminus U$ kümesi açıktır. Demek ki $B = \operatorname{cl}_Y(A) \subseteq B \setminus U$, yani $U = \emptyset$. □

Öte yandan $\emptyset \neq X \subset Y$ ise ve X, Y'nin seyrek bir altkümesi bile olsa, X hiçbir zaman X'in seyrek bir altkümesi olmaz.

Örnekler

20.1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'de seyrektir.

20.2. $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'de seyrektir.

20.3. Eğer A seyrekse, A'nın her altkümesi de seyrektir. Ayrıca A'nın kapanışı da, kapanışının altkümeleri de seyrektir.

20.4. Ama iki seyrek kümenin bileşimi seyrek olmak zorunda değildir. Örnek: $X = A \sqcup B \sqcup C$ olsun ve A, B ve C boşküme olmasınlar. X'in açık kümeleri $\emptyset$, $A \sqcup B$, $B \sqcup C$, $C \sqcup A$ ve X olsun ve başka da açık kümesi olmasın. O zaman A, B ve C kapalıdır ve her birinin içi boşkümedir, yani her biri seyrektir. Öte yandan herhangi ikisinin bileşimi açık bir kümedir ve dolayısıyla seyrek değildir.

20.5. Cantor kümesinin seyrek olduğunu sayfa 240'ta görmüştük.

Alıştırmalar

20.1. Sonlu sayıda seyrek kümenin bileşiminin de seyrek olduğunu kanıtlayın.

20.2. Kanıtlayın: $A \subseteq X$ için, A'nın seyrek bir altküme olması için gerek ve yeter koşul $(A^c)^\circ$, yani $(\operatorname{cl} A)^c$ kümesinin (bkz. Önsav 8.5) X'te yoğun olması koşuludur.

20.3. X'in kapalı bir F altkümesi için, $\partial F = F \setminus F^\circ$ kümesinin seyrek bir altküme olduğunu kanıtlayın.

20.4. X'in kapalı bir A altkümesi için, aşağıdaki koşulların eşdeğer olduklarını kanıtlayın:
i. A seyrek bir altkümedir.
ii. $A^\circ = \emptyset$,
iii. $\operatorname{cl} A^c = X$.

20.5. Eğer $U \subseteq X$ açıksa, ∂U kümesinin seyrek olduğunu kanıtlayın.

[2] İngilizcesi *nowhere dense* ya da *rare*

X bir topolojik uzay ve $M \subseteq X$ olsun. Eğer M, X'in sayılabilir sayıda seyrek altkümesinin bileşimiyse (ki bu seyrek altkümeler M'de kapalı alınabilir), M'nin X'in ***birinci kategoriden*** ya da ***zayıf***[3] ***altkümesi*** olduğu söylenir. Eğer M birinci kategoriden değilse M'nin X'in ***ikinci kategoriden altkümesi*** olduğu söylenir.

Alıştırmalar

20.6. X bir topolojik uzay olsun. Sayılabilir çoklukta birinci kategoriden altkümenin bileşiminin de birinci kategoriden olduğunu kanıtlayın.

20.7. Ayrık noktası olmayan bir metrik uzayın sayılabilir her M altkümesinin birinci kategoriden olduğunu kanıtlayın.

20.8. $A \subseteq X \subseteq Y$ olsun. Eğer A, X'te birinci kategoridense, Y'de de birinci kategoriden olduğunu gösterin.

20.2 Baire Uzayı

Aşağıdaki birbirine denk özelliklerden birini sağlayan bir topolojik uzaya ***Baire uzayı*** adı verilir.

Teorem 20.3. *Boş olmayan bir X topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir, yani biri doğruysa diğerleri de doğrudur:*

a. *$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ her biri X'te yoğun olan bir açık altküme ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ kümesi X'te yoğundur.*

b. *$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bir kapalı ve içi boş kümeler ailesiyse (yani her F_n seyrekse), F_n'lerin bileşiminin de içi boştur.*

c. *$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bileşimi X olan bir kapalı kümeler ailesi olsun. O zaman $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$ bileşimi X'te yoğundur.*

d. *X'in boş olmayan her açık altkümesi (dolayısıyla X de) X'in ikinci kategoriden altkümesidir, yani X'in sayılabilir sayıda seyrek altkümesinin bileşimi değildir.*

Kanıt: (a $\Rightarrow$ b). $\operatorname{cl} F_n^c = (F_n^\circ)^c = \emptyset^c = X$ olduğundan, F_n^c kümeleri açık ve yoğun kümelerdir. Dolayısıyla kesişimleri olan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$ kümesi de yoğundur. Demek ki,

$$X = \operatorname{cl}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c\right) = \operatorname{cl}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c\right) = \left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^\circ\right)^c$$

ve $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^\circ = \emptyset$.

(b $\Rightarrow$ a). Yukardaki kanıta benzerdir ve okura bırakılmıştır.

[3] İngilizcesi *meager*

Kaynakça

[Ap] Tom M. Apostol, **Calculus I** ve **II**, John Wiley and Sons 1967.

[Be] Sterling K. Berberian, **A First Course in Real Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1994.

[G] Roger Godement, **Analysis I** ve **II**, Springer, Universitext 2003. (Fransızcadan İngilizceye çeviren Philip Spain).

[Ke] John L. Kelley, **General Topology**, Van Nostrand 1955. Sonraki basım Springer 1975.

[MD] Matematik Dünyası dergisi, TMD, 2007-2011.

[Mu] James R. Munkres, Topology, a first course, Prentice-Hall, Inc. 1975.

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3'üncü basım, Nesin Yayıncılık 2011.

[N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N4] Ali Nesin, **Temel Gerçel Analiz** (Analiz I, gerçel sayılar, diziler ve seriler), Nesin Yayıncılık 2011.

[N5] Ali Nesin, **Analiz II** (süreklilik), Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N6] Ali Nesin, **Analiz III** (türev ve integral), Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak.

[Sp] Murray R. Spiegel, **Théorie et Applications de l'Analyse**, Serie Schaum, McGraw-Hill 1974.

[TT] Tosun Terzioğlu, **An Introduction to Real Analysis**, Matematik Vakfı 2000.

Dizin