İçindekiler

I. Önermeler Mantığı Nedir?

Önermeler mantığı, matematiğin ve matematiksel mantığın ilk konusu sayılabilir. Önermeler mantığı bilinmeden matematik ya da daha ileri düzeyde matematiksel mantık yapılamaz. Dolayısıyla, matematik ya da matematiksel mantık öğrenmek isteyenler ilk önce bu kitabın konusu olan önermeler mantığını (en azından ilk 7 bölümünü) öğrenmelidirler.

Önermeler mantığı felsefi mantıkta da önemlidir. Hatta önermeler mantığı klasik Aristo mantığının bir süreği olarak da görülebilir.

Daha başından hemen belirtelim: bu kitapta önermeler mantığı ne tarihsel ne de felsefi açıdan ele alınmıştır. Mantığın bu yönlerine ilgi duyanlara Doğan Özlem'in[1] ve Cemal Yıldırım'ın[2] kitaplarını öneririz. Bu kitapta önermeler mantığının matematiksel yönü çok daha ağır basacak[3].

Dediğim gibi bu kitapta önermeler mantığı felsefi olarak işlenmeyecek. Konuyu matematiksel olarak ele alacağız. Yani matematik yapacağız. Ancak matematiğe bu bölümde değil,

---

1 Doğan Özlem, *Mantık*, Ara Yayıncılık 58, Felsefe Dizisi 24, 1981.

2 Cemal Yıldırım, *Mantık, Doğru Düşünme Yöntemi*, V Yayınları, 1987.

3 Önermeler mantığının tarihiyle ilgili olarak şunları söylemekle yetineyim: Önermeler mantığını ilk ortaya çıkaran G. F. Leibniz'dir (1646-1716, Alman matematikçi ve filozof. Newton'dan bağımsız olarak analizin temellerini atmıştır.) Daha sonra George Boole (1815-1864, İngiliz mantıkçı) konuyu geliştirmiş ve aşağı yukarı bugünkü biçimselliğine getirmiştir.

bir sonraki bölümde başlayacağız. Bu bölümdeki amacımız, sonraki bölümlerde matematiksel olarak ele alacağımız konuya okurun yumuşak bir giriş yapmasını sağlamak olacak. Bu bölümü tam anlayamayan okur telaşlanmasın; okumasını sürdürsün ve daha sonra, gerekirse, bu bölüme geri dönsün. Daha kolay anladığını görecektir.

"Önerme" sözcüğü doğru ya da yanlış olabilecek tümce anlamına gelir. Örneğin,

$$2 + 2 = 4$$

ve

$$3 < 1$$

birer önermedirler. Bu önermelerden birincisi doğru, ikincisiyse yanlıştır.

Öte yandan

3, 1'den küçük müdür?

sorusu bir önerme değildir. Çünkü bir sorudur. Bir sorunun doğruluğu ya da yanlışlığı sözkonusu olamaz. Soru değil, sorunun yanıtı doğru ya da yanlış olabilir.

"$x > 1$" tümcesi de bir önerme değildir. Çünkü bu tümcenin doğruluk değeri x'e göre değişir. Öte yandan "$0 > 1$" tümcesi (yanlış) bir önermedir.

"Çabuk buraya gel" tümcesi bir önerme değildir. Çünkü bu tümcenin doğruluğundan ya da yanlışlığından sözedemeyiz.

"Nasılsın?", "Amma da attın haa" gibi tümceler de önerme değildir.

"Ayşe güzeldir" tümcesinin önerme olup olmadığı tartışılabilir. Güzellik, çirkinlik, yakışıklılık, çalışkanlık, tembellik, iyilik, kötülük gibi kavramlar kişiye ve zamana göre değişebilir. Örneğin, kimi kendisinin olmayan güzele güzel demez!

Kimi zaman bir tümcenin ya doğru ya da yanlış olduğunu bilebiliriz ama o tümcenin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu bilemeyebiliriz. Örneğin, "30 Ağustos 1994 günü Türkiye'de 1467 kuzu doğdu" tümcesi ya doğrudur ya da yanlış. Ancak bu tümcenin doğruluğunu bilemeyebiliriz. Gene de bu tümce bir önermedir. Bir tümcenin önerme olabilmesi için, önemli olan o tümcenin "doğru" ya da "yanlış" değerlerinden birini aldığıdır, hangi değeri aldığını bilip bilmememiz hiç önemli değildir.

Yukarıdaki örneğe benzer matematiksel bir örnek verelim. Matematikte ***Goldbach Sanısı*** diye adlandırılan ve bugüne değin kanıtlanamamış bir önerme vardır. Goldbach Sanısı, 4 ve 4'ten büyük her çift tamsayının iki asalın[4] toplamı olduğunu söyler. Örneğin,

$$\begin{aligned} 4 &= 2+2 \\ 6 &= 3+3 \\ 8 &= 3+5 \\ 10 &= 3+7 \\ 12 &= 5+7 \\ 14 &= 3+11 \end{aligned}$$

Goldbach Sanısı, adı üstünde, bir sanıdır. Yani doğru mu yanlış mı olduğu bugün bilinmemektedir. Öte yandan, Goldbach Sanısı ya doğrudur ya da yanlış. Dolayısıyla, Goldbach Sanısı bir önermedir.

"14 Haziran 1994 günü Ankara'ya yağmur yağdı" tümcesi bir önerme olarak kabul edilebilir. Tartışılabilir de. Ankara'nın neresine, saat kaçta yağmur yağdı gibi sorular sorulabilir. Hatta yağmurun anlamı üzerinde durulabilir. Gökyüzünden bir damla suyun düşmüş olması yağmur yağdığı anlamına gelir mi? Eğer o anlama gelirse, o düşen damlanın yağmur sayılabilmesi için hacmi ne olmalıdır, en az kaç su molekülünden oluşmalıdır? Eğer bir tek damla yağmur olarak kabul edilmiyorsa, yağmur kaç damladan oluşur? Örneğin 14 Haziran 1994 günü Ankara'ya (Meşrutiyet Caddesi'ne) saygıdeğer boyutlarda en az yüz

4 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, gibi 1'den ve kendinden başka sayıya bölünmeyen 1'den büyük doğal sayılara asal adı verilir.

damla yağmur yağdığını biliyorum. Gözlerimle gördüm! Ama daha fazla damla düştüğünü söyleyemem. Yüz damla yağmur sayılmalı mıdır?

Görüldüğü gibi günlük dilde yazılan tümcelerin önerme olduklarını ileri sürmek her zaman pek kolay değildir. Öte yandan matematiksel tümcelerin önerme olduklarını söylemek çok daha kolay.

Neyse ki bu kitapta bu gibi sorularla uğraşmayacağız. Her şeyden önce bu kitapta, "önerme" sözcüğünü yukardaki anlamında kullanmayacağız. "Önerme" sözcüğünü matematiksel bir terim olarak tanımlayacağız ve, böylece, neyin önerme olup neyin olmadığını kolaylıkla anlayabileceğiz. Ayrıca önermeler mantığı, önermelerin anlamlarını ve içeriklerini değil, doğruluk ve yanlışlık açısından birbirleriyle olan ilişkilerini irdeler. Birkaç örnekle bu dediğimi açıklamaya çalışayım.

Birinci Örnek: İlk olarak şu önermeyi ele alalım[5]:

Gökyüzü mavidir ve Murat gazete okumaktadır.

Bu önerme iki küçük önermeden (önermecikten) oluşmuştur. İki küçük önerme ("Gökyüzü mavidir" ve "Murat gazete okumaktadır" önermeleri) "ve" bağlacıyla birleştirilerek daha uzun bir önerme elde edilmiştir.

Önermemizin doğruluğu-yanlışlığı üzerine biraz düşünelim. Önermemiz ne zaman doğrudur? Eğer önermeyi oluşturan

Gökyüzü mavidir

ve

Murat gazete okumaktadır

5 Artık bu bölümde neyin önerme olup neyin önerme olmadığını tartışmayacağız. İnce eleyip sık dokumayacağız. Yoksa işin içinden çıkamayız. Verdiğim örnekleri önerme olarak kabul edin. Her birinin tartışılabilir olduğunun ayrımındayım. Bu kitapta kullanılacak olan "önerme" kavramının matematiksel tanımını ilerdeki bölümlerde yapacağız.

"önermecik"leri doğruysa, önermemiz de doğrudur. Bu iki önermecikten biri yanlışsa, örneğin Murat gazete okumamaktaysa, önermemiz yanlıştır (gökyüzü mavi bile olsa.) Önermemiz, kendisini oluşturan her iki önermeciği de ileri sürmektedir, yalnızca birini değil.

Birinci önermeciği, yani "gökyüzü mavidir" önermeciğini, p ile simgeleyelim. İkinci önermeciği, yani "Murat gazete okumaktadır" önermeciğini, q ile simgeleyelim. O zaman örnek olarak verdiğimiz önerme,

$$p \text{ ve } q$$

olarak yazılabilir. "p ve q" önermesi ancak ve ancak hem p hem q önermecikleri doğruysa doğrudur. p ve q önermeciklerinden biri yanlışsa, "p ve q" önermesi de yanlıştır. Görüldüğü gibi, irdelememizi p ve q önermeciklerinin anlamları üzerine değil, doğruluk ve yanlışlıkları üzerinde kurduk.

"Ve" bağlacını $\wedge$ olarak simgeleyelim. O zaman "p ve q" önermesi kısa olarak

$$p \wedge q$$

olarak yazılır. Yukarıdaki tartışmadan ve bu tanımdan şu ortaya çıktı: Eğer p ve q önermeciklerinin doğruluk değerlerini biliyorsak, $p \wedge q$ önermesinin doğruluk değerini bulabiliriz:

p	q	$p \wedge q$
yanlış	yanlış	yanlış
yanlış	doğru	yanlış
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Yukarıdaki çizelge şöyle okunmalıdır: Birinci satır, hem p hem de q'nün yanlış olduğunda $p \wedge q$ önermesinin de yanlış olduğunu söylüyor. İkinci satır, p yanlışsa ama q doğruysa, $p \wedge q$ önermesinin yanlış olduğunu söylüyor.

Bu çizelgeye $p \wedge q$ önermesinin ***doğruluk çizelgesi*** adı verilir.

XI. Tteorem ve Kkanıt

XI.A. GİRİŞ

Bu bölüme gelinceye dek birçok önsav ve teorem kanıtladık. Demek ki okurun "kanıt" ve "teorem" kavramlarını aşağı yukarı bildiğini varsaydık. Bu bölümde "kanıt" ve "teorem" adı verilen iki **yeni** kavram tanımlayacağız. Daha önce kullandığımız "kanıt" ve "teorem" kavramlarıyla birazdan tanımlayacağız "kanıt" ve "teorem" kavramları arasında önemli ayrımlar olacak.

Geçen bölümlerde verdiğimiz kanıtlar pek biçimsel değillerdi. Daha çok okurun sağduyusuna ve sezgisine sesleniyorlardı. Oysa birazdan tanımlayacağımız "kanıt" kavramı tam anlamıyla biçimsel ve matematiksel olacak. Öylesine biçimsel olacak ki, dileyen okur neyin kanıt olup neyin olmadığını anlamak için bir bilgisayar yazılımı (programı) yapabilecek. Bu, daha önce kullandığımız "kanıt" kavramıyla birazdan tanımlayacağımız "kanıt" kavramı arasındaki birinci ayrımdır.

İkinci ayrım şu: Geçen bölümlerin teorem ve kanıtlarını Türkçe yazdık, yani günlük dili kullandık. Oysa birazdan tanımlayacağımız "teorem"ler, 3'üncü bölümde biçimsel olarak tanımladığımız önermeler olacaklar, yani önermeler mantığının alfabesinde yazılmış sözcükler olacaklar. Örneğin, p herhangi bir önermeyse, $p \vee \neg p$ önermesinin - birazdan tanımlayacağımız anlamda - bir teorem olduğunu göreceğiz. Bu bölümde tanımlayacağımız "kanıt" kavramı da matematiksel bir nesne olacak: Kanıtı bir takım kesin kurallara uyan sonlu bir önermeler dizisi olarak tanımlayacağız.

Geçen bölümlerde kullandığımız kavramlarla birazdan tanımlayacağımız kavramlar arasında bir ayrım yapmamız belki daha doğru olur. Böylece okur daha kitabın başından beri kullanılan "kanıt" ve "teorem" kavramlarıyla birazdan tanımlanacak olan "kanıt" ve "teorem" kavramlarını birbirinden kolaylıkla ayırabilir. Bu nedenden, birazdan tanımlayacağım "kanıt" ve "teorem" kavramlarına "kkanıt" ve "tteorem" adını vermek aklıma geldi[1]. Örneğin, şöyle bir teorem yazabiliriz:

Teorem XI.1. *p herhangi bir önermeyse, $p \vee \neg p$ bir tteoremdir.*

Yukarıda kullandığımız ve koyu harfle yazdığımız birinci "teorem" terimi, sezgisel olarak bildiğimiz (ya da bildiğimizi sandığımız) "teorem" kavramıdır. İkinci "tteorem" terimiyse birazdan tanımlayacağımız anlamda kullanılmıştır. Her teorem gibi bu teoremin de bir kanıtı olacak. Bu kanıt şöyle başlayacak:

"**Kanıt:** $p \vee \neg p$ önermesinin bir tteorem olduğunu kanıtlamak için, bu önermeyi kkanıtlayan bir kkanıt bulmalıyız. İşte $p \vee \neg p$ önermesinin kkanıtı: ..."

Yukarıda koyu harflerle yazdığımız birinci "kanıt" terimi, kitabın başından beri kullandığımız "kanıt" teriminden değişik değil. İkinci "kkanıt" teriminiyse daha henüz tanımlamadık.

XII'nci bölümde de kanıtlayacağımız üzere, tteoremlerimiz her zaman doğru önermeler, yani hepdoğrular olacaklar. Bir sonraki XIII'üncü bölümde bunun tersinin de doğru ol-

---

1 "Kkanıt" yerine "önermeler mantığının kanıtı", "tteorem" yerine "önermeler mantığının teoremi" terimlerini de kullanabilirdik, ama bu terimler çok uzun.

duğunu kanıtlayacağız (XIII.1. Teorem): Her hepdoğru bir tteoremdir[2].

Matematik, zorunlu olarak aksiyomatik bir uğraş dalıdır. Aksiyom, doğruluğu tartışmasız kabul edilen olgu (daha doğrusu önerme ya da tümce) anlamına gelir. Matematikçi aksiyomlardam yola çıkarak yeni teoremler elde eder. Nasıl yoktan bir şey var edemezsek, doğruluğunu kabul ettiğimiz tümceler olmadan yeni "doğru" tümceler (yani teoremler) elde edemeyiz, yeni bir teorem elde etmek için mutlaka bazı olguları doğru kabul etmeliyiz. Sonuç: Matematik yapmak için aksiyomlara ihtiyacımız vardır. Aksiyomlar olmadan, yani dayanak noktası olmadan yeni teoremler elde edemeyiz.

Aksiyomlardan nasıl teorem elde edilir (üretilir)? Her şeyden önce -teoremin tanımı gereği- aksiyomların kendileri teoremdirler. Matematikçi bu aksiyomların birkaçından, belli kurallara uyarak, teorem adını verdiği yeni teoremler elde eder. Matematikçinin teorem elde etmek için kullandığı kurallara ***çıkarım kuralları*** denir. yaygın matematikte en çok (ve aslında tek) kullanılan çıkarım kuralı ***modus ponens*** adı verilen şu kuraldır:

Eğer "p" ve "p ise q" tümceleri birer teoremse,
"q" tümcesi de bir teoremdir.

Aşağıda da aynen bu yöntemi izleyeceğiz, tek farkla ki "teorem" yerine "tteorem" terimini kullanacağız. Önce aksiyomlarımızı tanıtacağız. Sonra tteorem kavramını tanımlayacağız. Tteorem kavramının tanımının kendisinden çıkarım kuralımızın ve kkanıt kavramımızın ne olması gerektiği anlaşılacak.

Bu girişten sonra artık matematiğe geçebiliriz.

XI.B. TANIMLAR

Sırayla aksiyomları, tteorem kavramını, kkanıt kavramını tanımlayacağız.

---

2 Her zaman doğru olan bir önermenin kanıtlanabilmesini isteriz elbet. Bu isteğimiz gerçekleşecek.

Kaynakça

[C] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic,* Princeton University Press, 1956.

[F] J.T. Fletcher, Mathematical Gazette, sayfa 183-188, 1952.

[HA] D. Hilbert ve W. Ackermann, *Principles of Mathematical Logic* (1928), Chelsea Publishing Co. 1950.

[H] Ross Honsberger, "Ingenuity in Mathematics", Mathematical Association of America, 23.

[M] Elliott Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic,* Wadsworth And Brooks, 1987.

[Me] C.A. Meredith, "Single axioms for the systems (C,N), (C,O) and (A,N) of the two-valued propositional calculus", J. Comp. Syst., 3 (155-164) 1952.

[N] Ali Nesin, *Matematik ve Oyun,* Nesin Yayıncılık, 2009.

[N2] Ali Nesin, *Sezgisel Kümeler Kuramı,* Nesin Yayıncılık, 2009.

[Ni] J.G. Nicod, "A reduction in the number of primitive propositions of logic", Proc. Camb. Phil. Soc. 19 (32-41) 1917.

[Ö] Doğan Özlem, *Mantık,* Ara Yayıncılık 58, Felsefe Dizisi 24, 1981.

[R] J.B. Rosser, *Logic for Mathematicians* (1953), McGraw-Hill, 1953.

[Y] Cemal Yıldırım, *Mantık, Doğru Düşünme Yöntemi,* V Yayınları, 1987.

Dizin