

İçindekiler

Önsöz	1
İkinci Basıma Önsöz.....	5
Üçüncü Basıma Önsöz.....	7
Birinci Bölüm: En Temel Kavramlar	
1. Sezgisel Anlamda Küme.....	13
2. Boşküme, Altküme ve Altkümelere Kümesi.....	25
2.1. Boşküme	25
2.2. Altküme	27
2.3. Altkümeliliğin Basit Özellikleri	30
2.4. Sayı Kümeleriyle Birkaç İşlem.....	31
2.5. Altkümelere Kümesi	34
2.6. Altkümelere Sıralamak	35
2.7. Kümelere Eleman Sayısı	39
3. Bileşim, Kesişim, Fark.....	43
3.1. Bileşim	43
3.2. Göstergeçler ve Göstergeç Kümelere	47
3.3. Kesişim (Arakesit).....	49
3.4. Dağılıma Özelliği	52
3.5. Kümelere Farkı.....	54
3.6. Tümleyen	55
3.7. Kümelere İşlemler	56
3.8. Kümelere Kapanışı ve İçisi*	59
4. Fonksiyon	67
4.1. Fonksiyonların Bileşkesi.....	74
4.2. Bileşkenin Birleşme Özelliği	77
4.3. Özdeşlik Fonksiyonu	78
4.4. Fonksiyon Çeşitleri	79

4.5. Eşlemelerin Tersisi	86
4.6. Görüntü ya da İmge	90
4.7. Öngörüntü ya da Önimage.....	93
4.8. Fonksiyonların Kısıtlanması.....	95
4.9. Fonksiyonların Bileşimi.....	97
4.10. İki Önemli Sonuç.....	99
4.11. Dizilerin Matematiksel Tanımı*	103
5. Gerçel Sayılarda Değer Alan Fonksiyonlar	105
5.1. Fonksiyonlarda İşlemler.....	105
5.2. Karakteristik Fonksiyon.....	108
5.3. Polinomial Fonksiyonlar	110
5.4. Küme Ailesi*	111
6. Seçim Fonksiyonları ve Seçim Aksiyomu	113
7. Kartezyen Çarpım.....	119
7.1. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı	120
7.2. Bir Fonksiyonun Grafiği	126
7.3. İzdüşüm Fonksiyonları.....	128
7.4. Çok Sayıda Kümenin Kartezyen Çarpımı*	129
7.5. Fonksiyonların Kartezyen Çarpımı*	131
8. Denklik İlişkisi.....	137
8.1. İlişki Tanımı ve Türleri	138
8.2. Çizgeyle Gösterim.....	143
8.3. Denklik Sınıfları.....	145
8.4. Örnekler	147
8.5. Bölüm Kümesi*	159
8.6. Esas Teorem*	161
8.7. Denklik İlişkilerinin Çarpımı*	164
9. Denklik İlişkisi Temsilcileri.....	167
10. Toplamı Yazmanın Şık Bir Yolu.....	179
11. Bileşim Kümesinin Eleman Sayısı.....	185
Okuma Parçası: Seçim Aksiyomu ve Bir Oyun.....	191
Karışık Alıştırmalar	199
Kümeler Kuramı Final Sınavı I.....	201

İkinci Bölüm: Sonsuz Kümelerin Elemanlarını Saymak

Okuma Parçası: Aristo'nun Tekerlek Paradoksu	207
Okuma Parçası: Sonsuz Sayıda Topla Bir Fantezi	211
Okuma Parçası: Hilbert Oteli	217
12. Sayılabilir Sonsuzluk.....	225
12.1. Kümeler Arasında Eşleniklik İlişkisi	227
12.2. \mathbb{N} ile $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Arasında Eşleme	228
12.3. \mathbb{N} 'nin Eşlenik Olduğu Birkaç Küme	229
12.4. \mathbb{N} 'nin Altkümeleri.....	229
12.5. \mathbb{N} ve \mathbb{Z} Arasında Eşleme	230
12.6. $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ve \mathbb{N} Arasında Eşleme	230
12.7. \mathbb{Q} ve \mathbb{N} Arasında Eşleme	233
12.8. Sayılabilir Sonsuzlukta Kümeler	234
13. Sayılamaz Sonsuzluk.....	239
13.1. Aralıklar	240
13.2. \mathbb{R}^2 ile \mathbb{R} Eşleniktirler	244
13.3. \mathbb{R} ile $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ Eşleniktirler	245
13.4. \mathbb{R} Sayılamaz Sonsuzluktadır	245
13.5. $\wp(\mathbb{N})$ ile 01-Dizileri Kümesi	247
13.6. \mathcal{D} ile \mathbb{R} Arasında Bir Eşleme.....	249
13.7. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$	251
13.8. Tam İkili Ağaç	252
13.9. Bölümün Özeti.....	253
13.10. Süreklilik Hipotezi*	253
14. Sayılabilir ve Sayılamaz Sonsuzluklar	255
15. Uygulamalar*	267
15.1. Biraz Cebir.....	267
15.2. Biraz Analiz	271
15.3. Biraz Bilgisayar Bilimi.....	271
15.4. Biraz Mantık.....	273
15.5. Bir Parça da Topoloji.....	274
16. Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi	279
17. Bertrand Russell Paradoksu	283

18. ZFC Kümeler Kuramının Aksiyomları ve Tanımlar	287
18.1 Basit Aksiyomlar.....	289
18.2 Sonsuzluk ve Doğal Sayılar Kümesi.....	299
18.3 İki Kümenin Kartezyen Çarpımı.....	303
18.4 İkili İlişki ve Sıralama.....	304
18.5 Fonksiyon.....	306
18.6 Peano Aritmetiği.....	308
18.7 Sonlu Kümeler.....	308
18.8 Doğal Sayılarda Toplama ve Çarpma.....	309
18.9 Birkaç Kavram Daha.....	313
18.10 Son Aksiyomlar.....	314
18.11 ZFC Aksiyom Listesi.....	316

Alıştırmalar..... 317

Kümeler Kuramı Final Sınavı II..... 321

Okuma Parçası: Kurt Gödel..... 323

Sınav Yanıtları

Kümeler Kuramı Final Sınavı I, Yanıtlar..... 331

Kümeler Kuramı Final Sınavı II, Yanıtlar..... 343

Ekler

Yunan Alfabetesi..... 351

Dizinler..... 353

1. Sezgisel Anlamda Küme

Bu ilk bölümde bir kümenin ne anlama geldiğini sezgisel olarak anlamaya çalışacağız. Bunu yaparken, doğal sayıları, hatta diğer sayıları da bildiğimizi varsayacağız, yoksa hiç örnek veremezdik. Doğal sayıları ve diğer sayıları matematiksel olarak *Sayıların İnşası* adlı bir başka kitabımızda inşa edeceğiz. Ama bu kitapta tanımlanan kavramlara matematiksel örnek verebilmek için en azından doğal sayılara ihtiyacımız olacak ve doğal sayıları hiç çekinmeden kullanacağız.

Kümenin sezgisel anlamını verelim: Bir *küme*, adına *öge* ya da *eleman* dediğimiz bazı nesnelere *içeren* bir topluluktur. Örneğin, ülkeler bir küme oluştururlar, bir ülkenin şehirleri bir küme oluşturur, bir şehrin okulları bir küme oluşturur, bir okulun sınıfları bir küme oluşturur, bir sınıfın öğrencileri bir küme oluşturur. Aışveriş listesi de (sıralı) bir küme olarak görülebilir.

Her ülke, ülkeler kümesinin bir elemanıdır. Ülkeler kümesini \mathcal{U} harfiyle, Türkiye'yi de T harfiyle gösterirsek, T 'nin \mathcal{U} kümesinin bir elemanı olduğunu,

$$T \in \mathcal{U}$$

yazılımla gösteririz. Eğer Ankara'yı A ile simgelersek, Ankara bir ülke olmadığından, A , \mathcal{U} 'nün bir elemanı değildir. Bunu da,

$$A \notin \mathcal{U}$$

olarak gösteririz.

Matematiksel bir kümenin elemanları da matematiksel nesnelere olmalıdır. Matematik yerine günlük hayattan alınan yukarıdaki örnekler matematiksel anlamda küme değildirler. Ama doğal sayılar kümesi matematiksel anlamda bir kümedir çünkü bu kümenin elemanları 0, 1, 2, 3 gibi sayılardır ve (çıkarmayı bekleyen *Sayıların İnşası* adlı kitabımızda göreceğimiz gibi) bunlar matematiksel nesnelere dir.

Doğal sayılar kümesi \mathbb{N} simgesiyle gösterilir. Örneğin,

$$5 \in \mathbb{N}, 6/2 \in \mathbb{N}, 5/2 \notin \mathbb{N}, -4 \notin \mathbb{N} \text{ ve } \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$$

ilişkileri doğrudur.

Eleman olarak sadece 2'yi, 3'ü, 5'i ve 7'yi içeren küme

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

olarak yazılır. $\{2, 3, 4\}$ bir başka kümedir; bu son kümenin üç elemanı vardır: 2, 3 ve 4.

Bazen bir kümenin sonsuz sayıda elemanı olabilir, doğal sayılar kümesi örneğin sonsuz elemanı olan bir kümedir. O zaman

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

gibi bir yazılımın kullanıldığı olur. Üç nokta, daha sonra gelecek elemanların neler olduğu aklı başında herkes tarafından anlaşılacağı anlamına gelir. Bu yaklaşım pek matematiksel olmasa da matematikte çok sık kullanılır. Örneğin,

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

olarak gösterilen kümenin elemanlarını herkes anlar, belli ki söz konusu küme çift sayılar kümesidir.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

kümesinin hangi elemanları içerdiğini anlamayan bu kitabın kapağını hemen şu an kapatabilir!

Yukarıda kullandığımız “{“ ve “}” simgelerine *açan* ve *kapatan küme parantezi* adı verilir. Küme parantezleri arasına aynı elemanı elli defa yazmak, o kümede o elemandan elli tane var anlamına gelmez! Bir elemandan bir kümede ancak tek bir tane olabilir... Örneğin,

$$\{a, a, a\}$$

kümesinin bir tek elemanı vardır, o da a 'dır.

$\{a, b\}$ kümesinin en az bir, en fazla 2 elemanı vardır; eğer $a = b$ ise 1, $a \neq b$ ise 2 eleman vardır.

$\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ yazılımları arasında matematiksel anlamda bir fark yoktur, ikisi de aynı kümeyi simgeler, çünkü her iki kümenin de aynı elemanları vardır: a ve b . Genel olarak, aynı elemanları olan iki kümenin birbirine eşit olduğu kabul edilir. Örneğin,

$$\begin{aligned}\{a, a, b\} &= \{a, b\}, \\ \{a, a, a\} &= \{a, a\}.\end{aligned}$$

Aynı elemanlara sahip iki kümenin birbirine eşit olduğunu, ya kanıtlanamayacak, doğru kabul edilmesi gereken bir önerme, yani bir *aksiyom* olarak kabul etmeliyiz ya da “küme eşitliği”nin bir tanımı olarak. Biz birincisini seçeceğiz:

Küme Eşitliği Aksiyomu: *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Aslında küme ve “bir kümenin elemanı olmak” ilişkisi de tanımlanamayan, matematiksel olarak tanımlanmadan kabul edilmesi gereken kavramlardır. Aksiyomatik kümeler kuramında amaç, matematiksel tüm kavramları, tanımlanmadan kabul edilen bu iki kavrama dayandırarak tanımlamak ve tüm teoremleri, kanıtlanmadan doğru kabul edilen önermelere, yani aksiyomlara dayandırarak kanıtlamaktır. Ama biz burada aksiyomatik değil, sezgisel kümeler kuramı yapıyoruz ve böyle bir uğraşa (çok) girmeyeceğiz.

Küme eşitliğine bir örnek daha verelim: Eğer

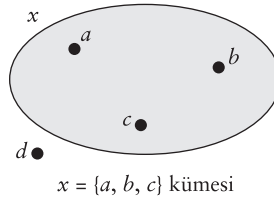
- A , 8'den küçük asal sayılar kümesi,
- B , $(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 7) = 0$ denkleminin çözüm kümesi ve
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$ ise

o zaman $A = B = C$ eşitlikleri geçerlidir, çünkü her üç kümenin de aynı elemanları vardır.

Kümeler, aşağıdaki şekildeki gibi yumurta ya da patates biçiminde bir şekilde gösterilir. Kümenin elemanları yumurtanın içine yazılır. Kümenin elemanı olmayan nesnelere de yumurtanın dışında gösterilir. Aşağıdaki örnekte üç elemanlı

$$x = \{a, b, c\}$$

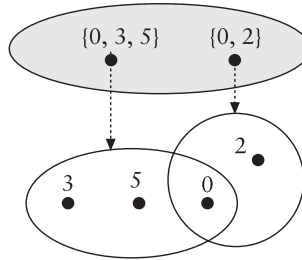
kümesi çizilmiştir. $d \notin x$ olduğundan, d , yumurtanın dışında kalıyor.



Kimi zaman bir kümenin elemanları da küme olabilirler. Örneğin

$$\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}$$

kümesinin $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ olmak üzere iki elemanı vardır ve her iki eleman da bir kümedir. Küme olan bu elemanların da elemanları vardır. Bu kümeyi ve elemanlarını aşağıdaki şekildeki gibi gösterebiliriz.



En yukarıda elemanları $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri olan iki elemanlı küme görülüyor. Bu kümeyi griye boyadık. Bu kümede $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri birer nokta olarak, yani birer eleman olarak gösterilmiş. Altta ise, $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri küme olarak gösterilmiş.

Kümenin elemanlarını kümenin çocukları olarak düşünecek olursak, kümenin elemanlarının elemanlarını kümenin torunları

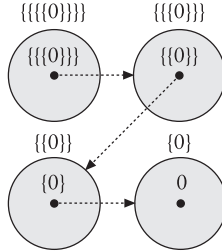
olarak düşünmek gerekir. Elbette bir kümenin elemanlarının elemanlarının elemanlarından da sözedebiliriz.

$\{0, 3, 5\}$ bir kümedir, ama bu küme yukardaki örnekte olduğu gibi bir başka kümenin elemanı olabilir. Demek ki aynı nesne aynı anda hem küme hem de eleman olabiliyor.

Bu gibi durumlarda aynı nesneyi aynı şekil üzerinde iki değişik biçimde resmetmekte yarar olabilir:

- 1) Eleman olarak, yani bir nokta olarak,
- 2) Küme olarak, yani yumurta biçiminde bir şekille.

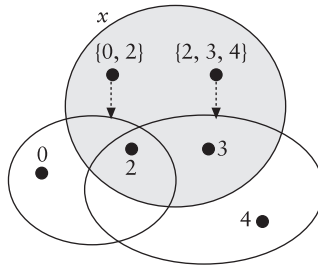
Yukarıdaki örnekten çok daha karmaşık durumlar olabilir. Sözelimi $\{\{\{\{0\}\}\}\}$ kümesinin tek bir elemanı vardır, o da $\{\{\{0\}\}\}$ kümesidir. $\{\{\{0\}\}\}$ kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da $\{\{0\}\}$ kümesidir. $\{\{0\}\}$ kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da $\{0\}$ kümesidir. $\{0\}$ kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da 0 'dır. Bu örneğimiz aşağıda resmedilmiştir.



Daha karmaşık durumlar olabilir. Şu örneği ele alalım:

$$x = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}$$

olsun. Bu kümeyi ve elemanlarını aşağıdaki şekilde resmettik.



Daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözelimi öyle bir x kümesi olabilir ki x 'in bir tek elemanı vardır ve bu eleman gene x 'tir... Yani $x = \{x\}$ olabilir. O zaman

$$x \in x \in x \in \dots$$

olur. Biz “olabilir” dedik diye olacak değil ama böyle bir durum gene de olabilir, olmaması için şimdilik görünürde bir neden yok, hayal etmesi oldukça zor bir durum olsa bile...

Öte yandan bir kümenin kendi kendisinin elemanı olması aksiyomatik kümeler kuramında bir aksiyomla yasaklanmıştır. Bu kitapta kümeler kuramının aksiyomlarıyla uğraşmadığımız için bu tür hastalıklı durumları reddetmiyoruz. Aynı yasaklama aynı nedenden aşağıdaki örnekler için de geçerlidir.

Şöyle bir durum da olabilir:

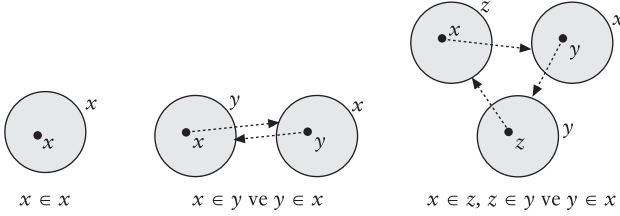
$$x = \{y\} \text{ ve } y = \{x\}.$$

O zaman $x \in y \in x \in y \in \dots$ olur.

Ya da şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\}, y = \{z\} \text{ ve } z = \{x\}.$$

İşte bu üç durumun resimleri:



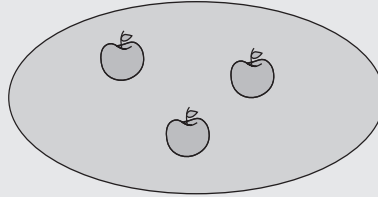
Yukardaki şekilde resmedilen durumlar, burada açıklaması imkânsız ve hatta gereksiz olan bir nedenden kümeler kuramında (*Temellendirme Aksiyomu* adı verilen bir aksiyomla, bkz sayfa 315) yasaklanır. Ama şimdilik bu durumların olamayacağını düşünmemiz için bir neden yok, hatta olabileceğini düşünmek, sezgiyle matematiksel bilgiyi ayırdedebilmek açısından yararlı bile olabilir.

Alıştırmalar

1. $\{\{1, 2, \{1, \{2\}\}\}$ kümesinin kaç elemanı vardır?
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise $\{x \cdot y : x \in A, y \in A\}$ kümesini, yani A 'daki sayıların gene A 'daki sayılarla çarpılmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir eleman içermeyen kümeyi bulun.
3. Eğer $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliklerini kanıtlayın.
4. Eğer $\{x, \{x, y\}\} = \{z, \{z, t\}\}$ ise, $x = z$ ve $y = t$ olmak zorunda mıdır?
5. Bir ders kitabında “sınıfımızın güzel kızları”nı eleman olarak içeren bir kümeden söz ediliyordu. Neden böyle bir küme (ne matematikte, ne sosyolojide, ne de herhangi bir bilimsel dalda) olamaz?
6. $x \in x$ ilişkisini sağlayan bir x kümesinin varlığının kabul edilebilir olup olmadığı konusunda arkadaşlarınızla felsefi bir tartışmaya girin. Matematiksel olarak kimsenin haklı çıkamayacağını bilerek...

İlkokul Kitaplarında Yaygın Bir İnanç

Birçok ilkokul matematik kitabında řu tip sorular görülür: “Aşağıdaki kümede kaç eleman vardır?”

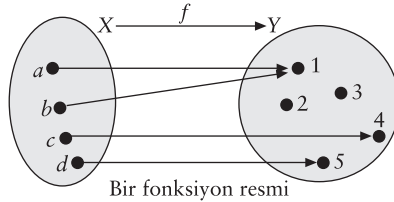


Doğru yanıt kitaba göre 3'tür. Oysa üç elma da tıpatıp aynı olduğundan doğru yanıt 1 olmalıdır.

4. Fonksiyon

Fonksiyon kavramının matematiğin en önemli kavramlarından biri olduğunu söylemek fonksiyon kavramına büyük haksızlık olur. Fonksiyon kavramı, matematiğin en önemli kavramlarından biri değil, matematiğin en önemli kavramıdır. Küme kavramı hariç, o da belki... Bilimin b'sinin girdiği her yerde fonksiyona rastlanır.

Herhalde aşağıdakine benzer şekilleri eğitim hayatınız boyunca sık sık görmüşsünüzdür.



Soldaki yumurta bir kümedir. Sağdaki domates de... İçindeki noktalar kümelerin elemanlarıdır. Soldaki yumurtanın her elemanı sağdaki domatesin bir elemanına bir okla “gönderilmiştir”.

Burada, X kümesinden Y kümesine giden bir f fonksiyonu şekledilmiştir. Sol taraftaki X kümesinin dört elemanı vardır: a , b , c ve d . Çoğu zaman açıkça söylenmez ama bu elemanların birbirinden değişik oldukları varsayılır. Sağ taraftaki kümeninse beş elemanı vardır: 1, 2, 3, 4, 5.

f , sol taraftaki kümenin her elemanını sağ taraftaki kümenin bir elemanına gönderen bir “kural”dır. Örneğin X kümesinin

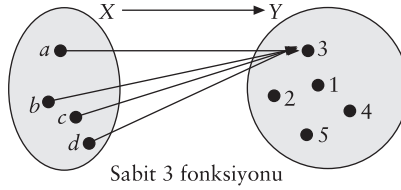
a ve b elemanları f kuralı gereğince Y 'nin 1 elemanına giderler. Bu,

$$f(a) = f(b) = 1$$

olarak gösterilir. Aynı biçimde, $f(c) = 4$ ve $f(d) = 5$ yazılır.

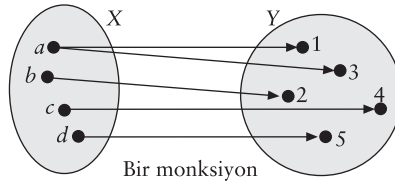
Y 'nin 2 ve 3 elemanlarına X 'ten hiçbir eleman gitmiyor. Bu hiç sorun edilmez. X 'ten Y 'ye giden bir fonksiyon Y 'nin her elemanına dokunmak zorunda değildir.

Bu ilk örnekte de olduğu gibi, X 'in iki ayrı elemanı (a ve b elemanları) Y 'nin aynı elemanına (1 elemanına) gidebilir. Hatta X kümesinin bütün elemanları Y kümesinin aynı elemanına gidebilir. Bu tür fonksiyonlara **sabit fonksiyon** denir.



X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyonda önemli olan, X 'in her elemanının, tanımlanan kural gereğince, Y 'nin tek bir elemanına gönderilmesidir.

Örneğin aşağıdaki şekildeki kural bir fonksiyon tanımlamaz. Çünkü burada X kümesinin a elemanı Y kümesinin iki ayrı elemanına (1'e ve 3'e) gönderilmekte. Fonksiyonun tanımı bunu yasaklar.



Dileyen, yukardaki şekildeki “şey”e başka bir ad bulabilir, örneğin “çok değerli fonksiyon” ya da “monksiyon” gibi. Ama bu “şey” kesinlikle bir fonksiyon değildir.

Dizin

01-dizileri	35, 38, 234, 248, 251, 252, 344	Beyarslan, Özlem	3
Abbas, Kadir	3	bijeksiyon	81
Ackermann, Wilhelm	324	bileşim	43, 43–65
açan parantez	14	Bileşim Aksiyomu	293
açık aralık	22, 274	bileşimin eleman sayısı	185
açık küme	64	bileşim kümesi	185–190
aile	48, 112, 313	bileşke	74
aksiyom	15	Bilge, Doğan	3
alfabe	271	bilgisayar programı	272
altküme	25–42, 27	birebir fonksiyon	80, 280
altkümeleri sıralamak	35	birim fonksiyon	78
altkümeler kümesi	25, 34	Birinci Eksiklik Teoremi	327
Altkümeler Kümesi Aksiyomu	298	birinci izdüşüm	128, 304
altküme sayısı	36	birinci izdüşüm fonksiyonu	307
ancak ve ancak	24	birleşme özelliği	44, 50, 58, 77
antisimetrik ilişki	139, 305	boşleşme	82
arakesit	43, 49, 50	boşfonksiyon	72
aralık	22, 23, 116, 240, 253	boşküme	25, 25–42, 290
Aristo	207	Boşküme Aksiyomu	289
Aristo'nun Tekerlek Paradoksu	207–209	boşsözcük	271
Arşimet Özelliği	45	bölüm kümesi	159, 160
aşkın	268	Burali-Forti Paradoksu	283
ayrık küme	317	C	117
Banach-Tarski Paradoksu	118	Cantor, Georg	100, 237, 268, 279
Bernays	287	Cantor Kümesi	277
Bernstein, Felix	279	Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi	279
Bertrand Russell Paradoksu	283–285, 288	Cantor'un çapraz yöntemi	246
		cebirsel sayı	268
		$cl(A)$	62
		Cohen, Paul	117, 254

çarpımdaş	136	elemanı olmak	288
çarpımsal küme	312	en küçük eleman	305
çarpma	309, 312	Eriş, Atay	3
çarpma altında kapalı	41	e sabiti	268
çıkarma altında kapalı	32, 41	eşçarpım	136
çift	303	eşleme	81
çizge	143	eşlemelerin tersi	86
dağılma özelliği	52, 58, 202, 334	eşlenik kümeler	82, 226
dal	252	eşleşme	82
Dedekind, J. W. Richard	237, 238	etkisiz eleman	44, 50, 58, 106
değer	69	evren	290
değer kümesi	69	evrensel özellik	132, 135
değişme özelliği	44, 50, 58	Fonk(X, Y)	101, 307
De Morgan özelliği	55	Farey, John	231
denk	226	fark	43-65, 54
denk elemanlar	146	fonksiyon	70-104, 105-112
denklik ilişkilerinin çarpımı	164	fonksiyon ailesi	112
denklik ilişkisi	137, 141, 305, 345	fonksiyonlarda işlemler	105
denklik ilişkisi temsilcileri	167	fonksiyonların bileşimi	97, 98
denklik sınıfları	145	fonksiyonların bileşkesi	74
Descartes, René	122	fonksiyonların eşitliği	73
dışbükey	60	fonksiyonlarının noktasal toplamı	105
dışbükey zarfı	62	fonksiyonların kartezyen çarpımı	131
dizi	103, 269, 313	fonksiyonların kısıtlanması	95
dizinin uzunluğu	35	fonksiyonları toplamak	105
doğal izdüşüm	160	fonksiyonun grafiği	126
doğal sayı	302	fonksiyonun tohumu	157
doğal sayılar kümesi	14, 20, 299, 302	Fonk(X, Y)	101, 307
ebob	42	Ford, Gerard	326
Eilenberg, Samuel	133	Fraenkel, Abraham	117, 287
Einstein, Albert	323, 325, 329	Frege, Gottlob	283
Einstein Ödülü	326	GB	287
ekok	42	geçişken ilişki	139, 305
Eksiklik Teoremi	327	geçişli ilişki	139, 305
eleman	13	geçişlik	30, 31
		gerçel sayılar kümesi	20
		Gezer, Anıl	3

Goethe, J. Wolfgang von	324	ise	24
Goldbach Sanısı	32	işlem altında kapalı	56
Gödel, Kurt	117, 254, 287, 323-330	iyisiralama	305
Gödel sayısı	328	izdüşüm	128, 304
gömme fonksiyonu	78	izdüşüm fonksiyonu	128, 135, 307
görüntü (elemanın)	69	izometri	102
görüntü fonksiyonu	92	kalkış kümesi	69
görüntü (kümenin)	90	Kant, Immanuel	325
göstergeç	47	kapalı altküme	59
göstergeç kümesi	47	kapalı aralık	22
grafik	126	kapalı aralık	22
grup	34	kapanış	59, 62
harf	271	kapatan parantez	14
Heine, Eduard	238	karakteristik fonksiyon	100, 108
hesaplanabilir küme	272	karakteristik özellik	120
hesaplanamaz küme	272	kartezyen çarpım	119-136, 122, 124, 130-131, 269, 303, 304, 313-314
Hilbert, David	238, 254, 283, 324, 327	kategori teori	133
Hilbert Otel	217-224	kesirli sayılar kümesi	20
Holt, Jim	329	kesişim	43-65, 49-50, 293
Husserl, Edmund	325	kısıtlanış	96
Id_X	78	kısıtlı kartezyen çarpım	269
$Izom(\mathbb{R})$	102	Korkmaz, Aslı Can	3
içermek	13	kural (fonksiyonun)	67
İçinelik-Dışındalık Teoremi	188, 202	Kuratowski, Kazimierz	122
İki Elemanlı Küme Aksiyomu	294	küme	13, 288
ikili	303	küme ailesi	48, 111, 112, 313
ikili ağaç	39, 252, 277	küme eşitliği	28
ikili ilişki	139	Küme Eşitliği Aksiyomu	15, 289
ikili işlem	56	kümeleri ayırıştırma	126
İkinci Eksiklik Teoremi	328	kümelerin farkı	54
ilişki	138	kümelerin tümleyeni	55
imge (elemanın)	69	kümelerle işlemler	56
imge (kümenin)	90	kümenin eleman sayısı	39, 226
inşa edilebilir evren	327	kümenin içi	59, 64
involutif işlem	58	kümenin kapanışı	59
		kümenin kuvveti	226
		kümenin parçalanışı	59
		küme parantezi	14

$\ell^\infty(X)$	109	polinomiyal fonksiyon	110
Lambert, Johann Heinrich	20	pr_1	128, 304
Leibniz, Gottfried	325	pr_i	135
liminf	215	\mathbb{Q}	20, 230, 264
limsup	215	$\mathbb{Q}[X]$	267
Liouville, Joseph	269		
Mac Lane, Saunders	133	\mathbb{R}	20, 245, 251, 252, 254
max	72	$\mathbb{R}^{>0}$	23
min	72	$\mathbb{R}^{\geq 0}$	23
modüler aritmetik	147–148, 168–169	Ratiu, Andrei	3
monksiyon	68	reel sayılar kümesi. Bkz gerçel sayılar kümesi	
Morgenstein, Oscar	325	Russell, Bertrand	283, 327-328
mutlak değer	73		
mutlak sıralama	142	$sX + r$	31
mutlak tamsıralama	142	Sym X	90, 101, 282, 318
		SA	324
\mathbb{N}	14, 20, 228–236, 254-255, 302	s_0	106
		s_1	107
Neumann, John von	287, 328	$S(x)$	297
Nimbursky (Porkert), Adele	324	sabit fonksiyon	68
		sayı çifti	120
öğe	13	sayı kümeleri	20
Öklid aksiyomları	283	sayı kümeleriyle işlemler	31
öngörüntü fonksiyonu	94	sayılabilir sonsuzluk	225, 234, 255–266
öngörüntü (kümenin)	93	sayılamaz sonsuzluk	239–254, 255–266
önimge (kümenin)	93	Schröder, Ernst	279
örten fonksiyon	79	Schwinger, Julien	326
özaltküme	27	Seçim Aksiyomu	113, 117, 191–198, 263, 279, 287, 309, 315, 324
özdeşlik fonksiyonu	78	seçim fonksiyonu	113
özellik	21	sezgisel kümeler kuramı	2
		SH	324
parçalanış	59	sıfır	296
parçalı tanımlanmış fonksiyon	98	sıfır fonksiyonu	106
Peano Aritmetiği	308	sınırlı fonksiyon	109
pi	268	sıralama	137, 141, 304, 305
Poincaré, Henri	254		
polinom	267		

simetri	30, 103	toplama	179-184, 309
simetrik fark	56, 57, 202, 296, 334	toplamsal küme	310
simetrik ilişki	139, 305	topoloji	274
soldan açık sağdan kapalı aralık	22	transandantal	268
Solovay, Robert M.	325	tümevarım ilkesi	303, 306
sonlu altkümeler	257	tümevarımla kanıt	303
sonlu küme	39, 308-309	tümevarımsal dizi	274
sonra gelen	297	tümevarımsal küme	300
sonsuz	22, 207-362	tümleyen	55
sonsuz küme	39, 309	üçlü	304
Sonsuz Küme Aksiyomu	299	varış kümesi	69
sonsuzluk	299	Viyana çevresi	324
sonsuz toplam	184	ya da	24
Süer, Sonat	3, 5, 8	yansıma	30, 139
Süreklilik Hipotezi	253, 254, 324, 327	yansımali ilişki	139, 305
tam ikili ağaç	252, 253, 277	yansımazlık	31
tamkısım	71	yarı açık aralık	22
tamkısım fonksiyonu	71	yarı kapalı aralık	22
Tamlık Teoremi	327	yarısiralama	141, 305
tamsayılar kümesi	20	Yerleştirme Aksiyomu	315
tamsıralama	142	yönlendirilmiş çizge	143
tanım kümesi	69	Yunan alfabesi	351
tanımlanabilir altküme	273	yutma	44, 50
tanımlanamaz altküme	273	yutulma	44, 50
Tanımlı Altküme Aksiyomu	291	\mathbb{Z}	20, 230
tanımsız terimler	288	Zermelo, Ernst	117, 287
tekgüçlü işlem	44, 50	ZF	117, 315
Temellendirme Aksiyomu	18, 315	ZF + $\neg C$	117
temsilci	167	ZF + C	117
terim	104	ZFC	118, 284, 287-316, 327
tohum	157, 158	ZFC aksiyom listesi	316
		$\mathbb{Z}[X]$	267