İçindekiler

1. Sezgisel Anlamda Küme

Bu ilk bölümde bir kümenin ne anlama geldiğini sezgisel olarak anlamaya çalışacağız. Bunu yaparken, doğal sayıları, hatta diğer sayıları da bildiğimizi varsayacağız, yoksa hiç örnek veremezdik. Doğal sayıları ve diğer sayıları matematiksel olarak *Sayıların İnşası* adlı bir başka kitabımızda inşa edeceğiz. Ama bu kitapta tanımlanan kavramlara matematiksel örnek verebilmek için en azından doğal sayılara ihtiyacımız olacak ve doğal sayıları hiç çekinmeden kullanacağız.

Kümenin sezgisel anlamını verelim: Bir ***küme***, adına ***öğe*** ya da ***eleman*** dediğimiz bazı nesneleri ***içeren*** bir topluluktur. Örneğin, ülkeler bir küme oluştururlar, bir ülkenin şehirleri bir küme oluşturur, bir şehrin okulları bir küme oluşturur, bir okulun sınıfları bir küme oluşturur, bir sınıfın öğrencileri bir küme oluşturur. Alışveriş listesi de (sıralı) bir küme olarak görülebilir.

Her ülke, ülkeler kümesinin bir elemanıdır. Ülkeler kümesini $Ü$ harfiyle, Türkiye'yi de T harfiyle gösterirsek, T'nin $Ü$ kümesinin bir elemanı olduğunu,

$$T \in Ü$$

yazılımıyla gösteririz. Eğer Ankara'yı A ile simgelersek, Ankara bir ülke olmadığından, A, $Ü$'nün bir elemanı değildir. Bunu da,

$$A \notin Ü$$

olarak gösteririz.

Matematiksel bir kümenin elemanları da matematiksel nesneler olmalıdır. Matematik yerine günlük hayattan alınan yukardaki örnekler matematiksel anlamda küme değildirler. Ama doğal sayılar kümesi matematiksel anlamda bir kümedir çünkü bu kümenin elemanları 0, 1, 2, 3 gibi sayılardır ve (çıkmayı bekleyen *Sayıların İnşası* adlı kitabımızda göreceğimiz gibi) bunlar matematiksel nesnelerdir.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir. Örneğin,

$$5 \in \mathbb{N},\ 6/2 \in \mathbb{N},\ 5/2 \notin \mathbb{N},\ -4 \notin \mathbb{N} \text{ ve } \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$$

ilişkileri doğrudur.

Eleman olarak sadece 2'yi, 3'ü, 5'i ve 7'yi içeren küme

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

olarak yazılır. {2, 3, 4} bir başka kümedir; bu son kümenin üç elemanı vardır: 2, 3 ve 4.

Bazen bir kümenin sonsuz sayıda elemanı olabilir, doğal sayılar kümesi örneğin sonsuz elemanı olan bir kümedir. O zaman

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

gibi bir yazılımın kullanıldığı olur. Üç nokta, daha sonra gelecek elemanların neler olduğu aklı başında herkes tarafından anlaşılacağı anlamına gelir. Bu yaklaşım pek matematiksel olmasa da matematikte çok sık kullanılır. Örneğin,

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

olarak gösterilen kümenin elemanlarını herkes anlar, belli ki söz konusu küme çift sayılar kümesidir.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

kümesinin hangi elemanları içerdiğini anlamayan bu kitabın kapağını hemen şu an kapatabilir!

Yukarda kullandığımız "{" ve "}" simgelerine ***açan*** ve ***kapatan küme parantezi*** adı verilir. Küme parantezleri arasına aynı elemanı elli defa yazmak, o kümede o elemandan elli tane var anlamına gelmez! Bir elemandan bir kümede ancak tek bir tane olabilir... Örneğin,

$$\{a, a, a\}$$

kümesinin bir tek elemanı vardır, o da *a*'dır.

$\{a, b\}$ kümesinin en az bir, en fazla 2 elemanı vardır; eğer $a = b$ ise 1, $a \neq b$ ise 2 eleman vardır.

$\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ yazılımları arasında matematiksel anlamda bir fark yoktur, ikisi de aynı kümeyi simgeler, çünkü her iki kümenin de aynı elemanları vardır: a ve b. Genel olarak, aynı elemanları olan iki kümenin birbirine eşit olduğu kabul edilir. Örneğin,

$$\{a, a, b\} = \{a, b\},$$
$$\{a, a, a\} = \{a, a\}.$$

Aynı elemanlara sahip iki kümenin birbirine eşit olduğunu, ya kanıtlanamayacak, doğru kabul edilmesi gereken bir önerme, yani bir ***aksiyom*** olarak kabul etmeliyiz ya da "küme eşitliği"nin bir tanımı olarak. Biz birincisini seçeceğiz:

Küme Eşitliği Aksiyomu: *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Aslında küme ve "bir kümenin elemanı olmak" ilişkisi de tanımlanamayan, matematiksel olarak tanımlanmadan kabul edilmesi gereken kavramlardır. Aksiyomatik kümeler kuramında amaç, matematiksel tüm kavramları, tanımlanmadan kabul edilen bu iki kavrama dayandırarak tanımlamak ve tüm teoremleri, kanıtlanmadan doğru kabul edilen önermelere, yani aksiyomlara dayandırarak kanıtlamaktır. Ama biz burada aksiyomatik değil, sezgisel kümeler kuramı yapıyoruz ve böyle bir uğraşa (çok) girmeyeceğiz.

Küme eşitliğine bir örnek daha verelim: Eğer

• A, 8'den küçük asal sayılar kümesi,

• B, $(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 7) = 0$ denkleminin çözüm kümesi ve

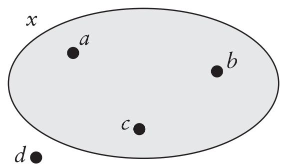
• $C = \{2, 3, 5, 7\}$ ise

o zaman $A = B = C$ eşitlikleri geçerlidir, çünkü her üç kümenin de aynı elemanları vardır.

Kümeler, aşağıdaki şekildeki gibi yumurta ya da patates biçiminde bir şekille gösterilir. Kümenin elemanları yumurtanın içine yazılır. Kümenin elemanı olmayan nesneler de yumurtanın dışında gösterilir. Aşağıdaki örnekte üç elemanlı

$$x = \{a, b, c\}$$

kümesi çizilmiş. $d \notin x$ olduğundan, d, yumurtanın dışında kalıyor.

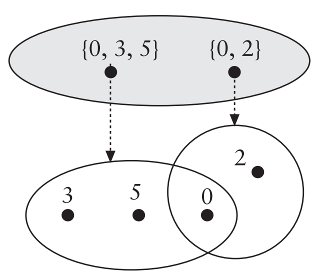


$x = \{a, b, c\}$ kümesi

Kimi zaman bir kümenin elemanları da küme olabilirler. Örneğin

$$\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}$$

kümesinin $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ olmak üzere iki elemanı vardır ve her iki eleman da bir kümedir. Küme olan bu elemanların da elemanları vardır. Bu kümeyi ve elemanlarını aşağıdaki şekildeki gibi gösterebiliriz.



En yukarda elemanları $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri olan iki elemanlı küme görülüyor. Bu kümeyi griye boyadık. Bu kümede $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri birer nokta olarak, yani birer eleman olarak gösterilmiş. Altta ise, $\{0, 3, 5\}$ ve $\{0, 2\}$ kümeleri küme olarak gösterilmiş.

Kümenin elemanlarını kümenin çocukları olarak düşünecek olursak, kümenin elemanlarının elemanlarını kümenin torunları olarak düşünmek gerekir. Elbette bir kümenin elemanlarının elemanlarının elemanlarından da sözedebiliriz.

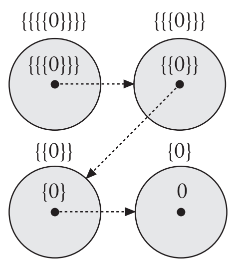
{0, 3, 5} bir kümedir, ama bu küme yukardaki örnekte olduğu gibi bir başka kümenin elemanı olabilir. Demek ki aynı nesne aynı anda hem küme hem de eleman olabiliyor.

Bu gibi durumlarda aynı nesneyi aynı şekil üzerinde iki değişik biçimde resmetmekte yarar olabilir:

1) Eleman olarak, yani bir nokta olarak,

2) Küme olarak, yani yumurta biçiminde bir şekille.

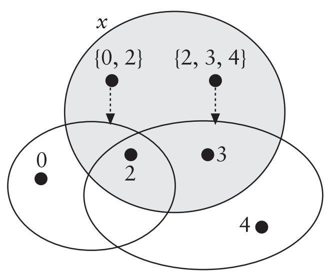
Yukarıdaki örnekten çok daha karmaşık durumlar olabilir. Sözgelimi {{{{0}}}} kümesinin tek bir elemanı vardır, o da {{{0}}} kümesidir. {{{0}}} kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da {{0}} kümesidir. {{0}} kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da {0} kümesidir. {0} kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da 0'dır. Bu örneğimiz aşağıda resmedilmiştir.



Daha karmaşık durumlar olabilir. Şu örneği ele alalım:

$$x = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}$$

olsun. Bu kümeyi ve elemanlarını aşağıdaki şekilde resmettik.



Daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözgelimi öyle bir x kümesi olabilir ki x'in bir tek elemanı vardır ve bu eleman gene x'tir... Yani $x = \{x\}$ olabilir. O zaman

$$x \in x \in x \in \ldots$$

olur. Biz "olabilir" dedik diye olacak değil ama böyle bir durum gene de olabilir, olmaması için şimdilik görünürde bir neden yok, hayal etmesi oldukça zor bir durum olsa bile...

Öte yandan bir kümenin kendi kendisinin elemanı olması aksiyomatik kümeler kuramında bir aksiyomla yasaklanmıştır. Bu kitapta kümeler kuramının aksiyomlarıyla uğraşmadığımız için bu tür hastalıklı durumları reddetmiyoruz. Aynı yasaklama aynı nedenden aşağıdaki örnekler için de geçerlidir.

Şöyle bir durum da olabilir:

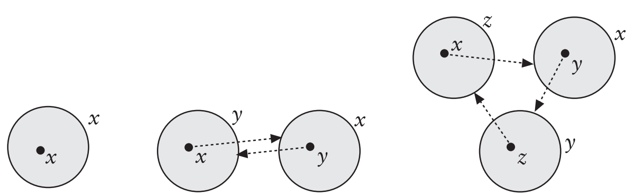
$$x = \{y\} \text{ ve } y = \{x\}.$$

O zaman $x \in y \in x \in y \in \ldots$ olur.

Ya da şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\},\ y = \{z\} \text{ ve } z = \{x\}.$$

İşte bu üç durumun resimleri:



$x \in x$ $\quad$ $x \in y$ ve $y \in x$ $\quad$ $x \in z$, $z \in y$ ve $y \in x$

Yukardaki şekilde resmedilen durumlar, burada açıklaması imkânsız ve hatta gereksiz olan bir nedenden kümeler kuramında (***Temellendirme Aksiyomu*** adı verilen bir aksiyomla, bkz sayfa 315) yasaklanır. Ama şimdilik bu durumların olamayacağını düşünmemiz için bir neden yok, hatta olabileceğini düşünmek, sezgiyle matematiksel bilgiyi ayırdedebilmek açısından yararlı bile olabilir.

Alıştırmalar

1. $\{\{1, 2, \{1, \{2\}\}\}\}$ kümesinin kaç elemanı vardır?

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise $\{x \cdot y : x \in A, y \in A\}$ kümesini, yani A'daki sayıların gene A'daki sayılarla çarpılmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir eleman içermeyen kümeyi bulun.

3. Eğer $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliklerini kanıtlayın.

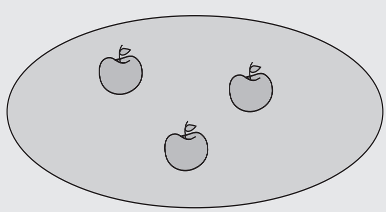
4. Eğer $\{x, \{x, y\}\} = \{z, \{z, t\}\}$ ise, $x = z$ ve $y = t$ olmak zorunda mıdır?

5. Bir ders kitabında "sınıfımızın güzel kızları"nı eleman olarak içeren bir kümeden sözediliyordu. Neden böyle bir küme (ne matematikte, ne sosyolojide, ne de herhangi bir bilimsel dalda) olamaz?

6. $x \in x$ ilişkisini sağlayan bir x kümesinin varlığının kabul edilebilir olup olmadığı konusunda arkadaşlarınızla felsefi bir tartışmaya girin. Matematiksel olarak kimsenin haklı çıkamayacağını bilerek...

İlkokul Kitaplarında Yaygın Bir İnanç

Birçok ilkokul matematik kitabında şu tip sorular görülür: "Aşağıdaki kümede kaç eleman vardır?"

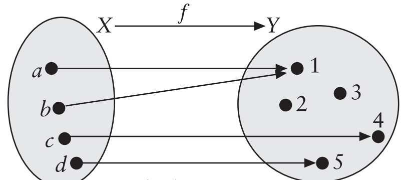


Doğru yanıt kitaba göre 3'tür. Oysa üç elma da tıpatıp aynı olduğundan doğru yanıt 1 olmalıdır.

4. Fonksiyon

Fonksiyon kavramının matematiğin en önemli kavramlarından biri olduğunu söylemek fonksiyon kavramına büyük haksızlık olur. Fonksiyon kavramı, matematiğin en önemli kavramlarından biri değil, matematiğin en önemli kavramıdır. Küme kavramı hariç, o da belki... Bilimin b'sinin girdiği her yerde fonksiyona rastlanır.

Herhalde aşağıdakine benzer şekilleri eğitim hayatınız boyunca sık sık görmüşsünüzdür.



Bir fonksiyon resmi

Soldaki yumurta bir kümedir. Sağdaki domates de... İçindeki noktalar kümelerin elemanlarıdır. Soldaki yumurtanın her elemanı sağdaki domatesin bir elemanına bir okla "gönderilmiştir".

Burada, X kümesinden Y kümesine giden bir f fonksiyonu şekledilmiştir. Sol taraftaki X kümesinin dört elemanı vardır: a, b, c ve d. Çoğu zaman açıkça söylenmez ama bu elemanların birbirinden değişik oldukları varsayılır. Sağ taraftaki kümeninse beş elemanı vardır: 1, 2, 3, 4, 5.

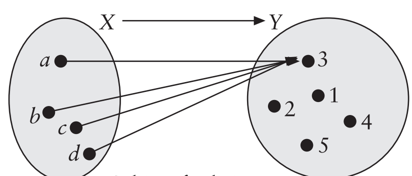
f, sol taraftaki kümenin her elemanını sağ taraftaki kümenin bir elemanına gönderen bir "kural"dır. Örneğin X kümesinin *a* ve *b* elemanları *f* kuralı gereğince *Y*'nin 1 elemanına giderler. Bu,

$$f(a) = f(b) = 1$$

olarak gösterilir. Aynı biçimde, $f(c) = 4$ ve $f(d) = 5$ yazılır.

Y'nin 2 ve 3 elemanlarına *X*'ten hiçbir eleman gitmiyor. Bu hiç sorun edilmez. *X*'ten *Y*'ye giden bir fonksiyon *Y*'nin her elemanına dokunmak zorunda değildir.

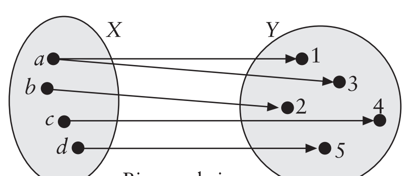
Bu ilk örnekte de olduğu gibi, *X*'in iki ayrı elemanı (*a* ve *b* elemanları) *Y*'nin aynı elemanına (1 elemanına) gidebilir. Hatta *X* kümesinin bütün elemanları *Y* kümesinin aynı elemanına gidebilir. Bu tür fonksiyonlara ***sabit fonksiyon*** denir.



Sabit 3 fonksiyonu

X kümesinden *Y* kümesine giden bir fonksiyonda önemli olan, *X*'in **her** elemanının, tanımlanan kural gereğince, *Y*'nin **tek bir** elemanına gönderilmesidir.

Örneğin aşağıdaki şekildeki kural bir fonksiyon tanımlamaz. Çünkü burada *X* kümesinin *a* elemanı *Y* kümesinin iki ayrı elemanına (1'e ve 3'e) gönderilmekte. Fonksiyonun tanımı bunu yasaklar.



Bir monksiyon

Dileyen, yukardaki şekildeki "şey"e başka bir ad bulabilir, örneğin "çok değerli fonksiyon" ya da "monksiyon" gibi. Ama bu "şey" kesinlikle bir fonksiyon değildir.

Dizin